MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEK VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK KONUSUNDAKİ KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Birgül YILDIZ

Eskişehir 2019

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEK VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK KONUSUNDAKİ KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Birgül YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Eğitimi Programı / Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Ağustos 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Birgül YILDIZ'ın "Matematik Öğretmen Adaylarının Tek ve İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik Konusundaki Kavramsal ve İşlemsel Bilgilerinin İncelenmesi" başlıklı tezi 12.07.2019 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU	
Üye	: Prof.Dr. Aytaç KURTULUŞ	
Üye	: Doç.Dr. Tuba ADA	

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdür Vekili

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEK VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK KONUSUNDAKİ KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Birgül YILDIZ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ağustos 2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU

Bu araştırmanın amacı, öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularına yönelik tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesidir. Araştırma, bir devlet üniversitesinde güz ve bahar eğitim-öğretim dönemleri içerisinde Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı ikinci sınıf Analiz 1 ve Analiz 2 dersinin her ikisini de alan otuz öğretmen adayının katılımı ile gerçekleşmiştir. Araştırmanın modeli temel nitel araştırma olup veri toplama aracı açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Açık uçlu sorular, adayların limit ve süreklilik konularındaki kavramsal ve işlemsel bilgilerini incelemeye yönelik sorulardan oluşmaktadır. Araştırmadan elde edilen bulgular içerik analizi kullanılarak çözümlenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgularda öğretmen adaylarının fonksiyon bilgilerinde eksiklikler olduğu, limit ve sürekliliğe yönelik işlemsel bilgi içeren bazı sorularda daha iyi sonuçlar elde ettikleri ve kavramsal bilgi içeren sorulara ezbere yanıtlar verdikleri, limit ve süreklilik kavramlarına yönelik tanımlarda formal tanımı tercih ettikleri, tek değişkenli fonksiyonların istenen noktadaki sürekliliğini grafik üzerinde yorumlarken başarılı oldukları görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Kavramsal bilgi, İşlemsel bilgi, Limit, Süreklilik.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE CONCEPTUAL AND OPERATIONAL KNOWLEDGE OF MATHEMATICS TEACHER CANDIDATES ON LIMIT AND CONTINUITY IN ONE AND TWO VARIABLE FUNCTIONS

Birgül YILDIZ

Department of Mathematics and Science Education

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, August 2019

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gonca İNCEOĞLU

The aim of this study is to examine the conceptual and computational knowledge of prospective teachers in one and two variable functions related to limit and continuity. The research was carried out with the participation of thirty prospective teachers who participated in the second year Analysis 1 and Analysis 2 courses in the Elementary Mathematics Teaching Program of the Department of Science and Mathematics Education in the fall and spring semesters in a public university. The model of the study is a basic qualitative research and the data collection tool consists of open-ended questions. The open-ended questions consist of questions aimed at examining the conceptual and operational knowledge of the candidates on limit and continuity. The findings of the research were analyzed using content analysis. In the findings of the research, it was observed that pre-service teachers lacked functional information, they obtained better results in some questions containing operational information about limit and continuity, they answered memorized questions with conceptual information, they preferred formal definition in definitions related to limit and continuity, univariate functions they were successful in interpreting the continuity on the graph.

Keywords: Conceptual information**,** Procedural knowledge, Limitation, Continuity.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve araştırmam boyunca, engin bilgilerinden her fırsatta yararlandığım, manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, değerli düşünceleriyle çalışmama büyük katkılarda bulunan ve sabırla bana yardımcı olan çok değerli hocam, danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan biricik ailem, annem Gülten YILDIZ, babam Ercan YILDIZ ve kardeşim Saadet Buket DEMİR'e sonsuz teşekkür ederim.

Tezimi kıymetli dedem Beyzade YILDIZ'a ithaf ediyorum.

Birgül YILDIZ

Eskişehir 2019

15 / 08 / 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Birgül YILDIZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI i

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI ii

ÖZET iii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜR v

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ vi

İÇİNDEKİLER vii

TABLOLAR DİZİNİ ix

ŞEKİLLER DİZİNİ xi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xiii

1. GİRİŞ 1

1.1. Problem 1

1.1.1. Kavramsal bilgi 2

1.1.2. İşlemsel bilgi 4

1.1.3. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkinin kurulması 5

1.1.4. Limit ve süreklilik kavramları ve öğretimi 7

1.2. Amaç 14

1.3. Önem 14

1.4. Varsayımlar 14

1.5. Sınırlılıklar 14

1.6. Tanımlar 14

2. ALANYAZIN 16

2.1. Limit ve Süreklilik, İşlemsel ve Kavramsal Bilgi Kavramlarına Yönelik Yapılan Yayın ve Araştırmalar 16

Sayfa

3. YÖNTEM **22**

3.1. Araştırmanın Modeli **22**

3.2. Araştırmanın Katılımcıları **22**

3.3. Araştırmanın Veri Toplama Aracı **22**

3.4. Verilerin Analizi **23**

4. BULGULAR VE YORUM **25**

4.1. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusuna yönelik bulgular **25**

4.2. İki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusuna yönelik bulgular **46**

4.3. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının karşılaştırılması **55**

4.4. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda sürekliliğin karşılaştırılması **56**

4.5. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda grafikte sürekliliğin karşılaştırılması **57**

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER **58**

5.1. Sonuç ve Tartışma **58**

5.2. Öneriler **64**

KAYNAKÇA **66**

EKLER

ÖZGEÇMİŞ

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 4.1. Limit kavramının tanımına verilen cevapların frekans ve yüzde dağılımları 25
Tablo 4.2. Limit kavramına verilen cevapların sınıflandırılması 25
Tablo 4.3. Limit tanımınında niceleyici kullanımı 26
Tablo 4.4. Limit tanımında niceleyici kullanmayanlar 27
Tablo 4.5. 1/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 29
Tablo 4.6. Limit tanımında alt problem alanına verilen cevapların yüzde ve frekans dağılımı 30
Tablo 4.7. 2.sorunun frekans ve yüzde dağılımları 30
Tablo 4.8. Sağ komşuluğun incelenmesi 31
Tablo 4.9. 3. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 33
Tablo 4.10. 4/a.sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 35
Tablo 4.11. 4/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 37
Tablo 4.12. 4/c sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 38
Tablo 4.13. 4/d sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 41
Tablo 4.14. 5. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 42
Tablo 4.15. 6. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 45
Tablo 4.16. İki değişkenli fonksiyonlarda limit ve sürekliliğe dair açık uçlu 1. sorunun cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları 46
Tablo 4.17. İki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramına yönelik cevapların sınıflandırılması 47
Tablo 4.18. İki değişkenli fonksiyonların limit tanımında niceleyici kullanımı 47
Tablo 4.19. 1/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 48
Tablo 4.20. 2/a sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 49
Tablo 4.21. İki değişkenli fonksiyonlarda formal ve informal tanıma yönelik cevapların frekans ve yüzde dağılımı 50
Tablo 4.22. İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik niceleyici kullanımı 51
Tablo 4.23. İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik niceleyici kullanmayanlar 51

Sayfa

Tablo 4.24. 2/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 52
Tablo 4.25. 3. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 54
Tablo 4.26. 4 sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları 55
Tablo 4.27. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının karşılaştırılması .. 56
Tablo 4.28. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik karşılaştırılması 56
Tablo 4.29. Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda grafikte sürekliliğin karşılaştırılması 57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Kavramların İlişkisi Örneği 4
Şekil 1.2. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasında ilişki kurulmaması 6
Şekil 1.3. İlişkisel anlama 7
Şekil 1.4. Limitin kavramsal açıdan anlaşılması 8
Şekil 1.5. *a* noktasının ε komşuluğu 9
Şekil 1.6. *a*'nın delinmiş ε komşuluğu 10
Şekil 1.7. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit 11
Şekil 1.8. *x* 'in *a* noktasına sağdan ve soldan yaklaşımı 12
Şekil 1.9. İki değişkenli fonksiyonlarda limit 13
Şekil 4.1. 1.soruya verilen cevaplardan biri 27
Şekil 4.2. Öğretmen adayının limit tanımlarına yönelik soruya ilişkin cevaplarına örnek 27
Şekil 4.3. Limitin delinmiş komşuluk kavramı ile ifade edilmesi 28
Şekil 4.4. Öğretmen adayının limit tanımına verdiği yanıt 28
Şekil 4.5. 1/b sorusuna verilen cevaplardan biri 29
Şekil 4.6. 1/b sorusuna verilen yanıtlardan biri 30
Şekil 4.7. Öğretmen adayının ikinci soruya yanıtı 31
Şekil 4.8. 2.soruya verilen cevaplardan biri 32
Şekil 4.9. Öğretmen adayının 3.soruya yanıtı 33
Şekil 4.10. 3.soruya verilen cevaplardan biri 34
Şekil 4.11. Öğretmen adayının 4/a sorusuna yönelik yanıtı 35
Şekil 4.12. 4/a sorusuna verilen cevaplardan biri 36
Şekil 4.13. 4/a sorusuna öğretmen adayının yanıtı 36
Şekil 4.14. 4/b sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek 37
Şekil 4.15. 4/b sorusuna verilen yanıtlardan biri 38
Şekil 4.16. 4/c sorusuna verilen cevaplardan biri 39
Şekil 4.17. Öğretmen adayının 4/c sorusuna yanıtı 39
Şekil 4.18. Öğretmen adayının sonsuz kavramını reel sayı olarak ele alması 40
Şekil 4.19. Öğretmen adayının yanıtı 40

Sayfa

Şekil 4.20. 4/d sorusuna öğretmen adayının verdiği yanıt 41
Şekil 4.21. Öğretmen adayının 4/d sorusuna yanıtı 42
Şekil 4.22. 5.soruya verilen yanıtlardan biri 43
Şekil 4.23. Öğretmen adayının yanıtı 43
Şekil 4.24. 5.soruya verilen yanıtlardan biri 44
Şekil 4.25. 5.soruya verilen yanıtlardan birkaçı 44
Şekil 4.26. *f(x)* fonksiyonunun grafiği 45
Şekil 4.27. 6.soruya verilen yanıtlardan biri 46
Şekil 4.28. İki değişkenli fonksiyonlarda limit tanımına verilen cevaplardan birkaçı .. 48
Şekil 4.29. 1/b sorusuna verilen yanıtlardan biri 49
Şekil 4.30. İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik verilen cevaplardan biri 51
Şekil 4.31. İki değişkenli fonksiyonlarda öğretmen adayının süreklilik kavramına yönelik tanımı 52
Şekil 4.32. 2/b sorusuna verilen yanıtlarından birkaçı 53
Şekil 4.33. *z = f(x,y)* fonksiyonunun grafiği 54
Şekil 4.34. Öğretmen adaylarının cevaplarından birkaçı 55

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$: Her

$\exists$: En az bir

D_f : Tanım kümesi

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

1. GİRİŞ

Araştırmanın bu bölümünde problem, araştırmanın amacı, önemi, varsayımları, sınırlılıkları ve tanımlar yer almaktadır.

1.1. Problem

Matematik, art arda soyutlama ve genellemeler süreci olarak geliştirilen düşünceler ve bağıntılardan oluşan bir sistemi ifade eder (Baykul,1993). Bu sistemin özellikleri aşağıda belirtilmiştir.

1. Matematik günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözmek için başvurulan sayma, hesaplama, ölçme ve çizme işlemlerini kapsar.
2. Matematik, sembollerin kullanıldığı bir dili ifade eder.
3. Matematik, insanın mantıksal düşünmesini sağlayan sistemin oluşmasını sağlar.
4. Matematik, dünyayı anlamlandırmamızı ve yaşadığımız çevreyi geliştirmemizi sağlayan bir sistemdir.
5. Matematik bu dört maddeden sadece birini ifade etmezken bu maddelerin birleşiminden oluşan bütünü ifade eder.

Kısacası matematik bir sistem belirtir. Bu sistem, yapı ve bağıntıların biraraya gelmesiyle oluşup bu yapı ve bağıntıların oluşturduğu art arda soyutlamalar ve genellemeler sürecini kapsayan soyut bir kavramı ifade eder.

Matematik içeriği incelendiğinde, bu içeriğin yapısına uyarlanan bir öğretim, öğrencilerin matematikle ilgili kavramsal ve işlemsel anlamalar gerçekleştirmelerini, kavramlar ve işlemler arasında ilişki kurmalarını sağlayacak yönde olmalıdır (Schoenfeld, 1989).

Baykul (1993)'e göre matematik öğretimi aşağıdaki yetenekleri geliştirir. Öğrenci;

1. Matematiksel kavramları ve yöntemleri anlar.
2. Matematiksel bağların farkına varır.
3. Mantıklı sonuçlar elde etme yetenekleri gelişir.
4. Rutin olmayan problemlerin çözümünde matematiksel kavram, yöntem ve kuralları uygular**.**

Matematiği oluşturan temel kavramların anlaşılması ve uygulanması yani bu kavramların kullanılarak yeni bilgiler oluşturulması sonucunda eğitim sistemine katkı sağlamak matematik eğitiminin temel hedeflerinden biridir. Bu bakış açısının benimsenmesi ile öğrencilerin matematikteki temel kavram ve işlemleri ezberlemek

yerine matematiksel düşünmenin gelişmesini sağlayacak bir öğretim biçimi benimsenmelidir. Matematiksel düşünmenin gelişmesi ile bilginin zihinde uzun süreli yer alması sağlanırken yeni oluşturulan kavramların bilişsel yapıda yer alması sağlanır. Anlamlı öğrenme eski ve yeni bilgiler arasında kurulan bağ sayesinde oluşturulmaktadır. Anlamlı öğrenme gerçekleştiren öğrenci bilgiyi anlamsız bir şekilde öğrenen öğrenciden daha kolay geri getirebilirken bu sayede oluşturulan bilgi daha kalıcı ve genellenebilir bir özelliği içermektedir (Senemoğlu, 2001). O halde, bilginin anlamlı öğrenilmesinin sağlanması ile matematiksel düşünme gelişimi desteklenir, ezbere yöntemlere başvurulmasının önüne geçilir ve bilginin kalıcılığı arttırılır.

Kavramsal anlam veya kavram oluşturma, kavramların gelişimi ve matematiğin temel ilişkileri etrafında yapılanmaktadır. Ubuz (1999)'a göre yapılan araştırmalar göstermektedir ki:

1. Öğrenciler, matematiksel yöntemleri, genellikle zayıf imgeleri üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğrenmektedir. Kavramların öğrenilmesi aşamasında çıkarımların yapılmasına engel olan konuların başında fonksiyonlar ve limit en önemli kavramlardır.
2. Görsel canlandırmalar seyrek olmakla birlikte eğer yapılırsa görsel-grafiksel ve çözümsel-cebirsel gösterimler arasında bilişsel bağlantı önemli bir sorun teşkil etmektedir.

Matematik eğitiminde yapılan araştırmalar, matematikte işlemsel ve kavramsal öğrenme olarak farklı iki öğrenme çeşidinin olduğunu göstermektedir (DiSessa,1985; Skemp, 1987; Garofalo ve Durant, 1991). Bu iki çeşit öğrenmenin kesin çizgilerle birbirinden ayrılması zor olsa da her ikisini karakterize edecek öğrenme ürünleri bulmak her zaman mümkündür (Baki, 1994). Kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi için kavramsal bilgi matematik eğitimi açısından önem arz etmektedir.

1.1.1. Kavramsal bilgi

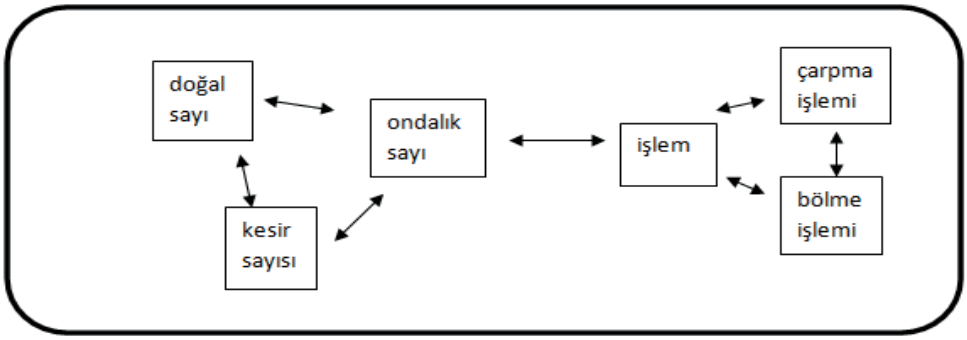
Kavramsal bilgi, matematiksel kavramların kendilerini ve bunlar arasındaki ilişkileri içerir. Matematikte yer alan kavramların insan zihninde meydana getirilen ilişkiler olması, bunları kazanabilmek için belirli bir zihinsel gelişmişlik seviyesine ulaşılmış olması gerekir (Baykul, 2005).

İnsanlar yeni kavramlar öğrenirken bu bilgilerini var olan bilgileri üzerine yapılandırır. Benzer olarak, matematiksel bilgiler de daha önce öğrenilen bilgilere eklenerek oluşur. Eğer yeni bilgi ile eski bilgi arasında uygun bir şekilde ilişki

kurulabilir ve uzlaştırılabilirse o zaman söz konusu kavramla ilgili anlama inşa edilir (Skemp, 1971). Öğrenmenin gerçekleşmesi, zihinde ilişkilendirmenin oluştuğu an meydana gelir. Kavram bilgisi birbiri ile bağlantılı halkalara benzetilirse, her halka ayrı ayrı bilgiyi kapsar. Birbirine bağlı halkaların sayısının artması ile oluşan halka takımı genişler ve bağlı olunan bilgi parçaları daha da zenginleşir. Eklenen her halka daha anlamlı öğrenmeler oluşturacağından halka takımının temsil ettiği kavram anlamlılık meydana getirecektir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Kavsamsal bilginin artması bilgiler arasındaki bağların artmasıyla oluşur.

Kavramsal bilginin öğrenilmesinde öğrenci, problem çözme ve matematiksel bilgi üretme aşamasında yaratıcılık, sezgi ve yeteneklerini etkin bir şekilde kullanabilme yetisini gösterir. Bunun için kavramsal öğrenme boyutu matematiği birbiri ile ilişkili kavramlar ve düşünceler sistemi olarak görür ve matematiksel kavram ve yapıların ezberlenmesi ve kopyalanması yerine öğrencinin bu kavram ve yapıları kendi çabaları ile inşaa etmesini önerir (Baki ve Bell, 1997).

Kavramsal öğrenme, var olan sistemde sıklıkla görülmese de matematiği ve fen bilimlerini daha iyi anlamanın bir yoludur. Matematiksel problemlerin çözüm aşamasında iki farklı çözücülerle karşılaşılır; usta ve çırak. Usta, problemin çözümünde kavramsal bilgilere başvurarak çözüme ulaşırken çırak ise karşılaştığı problemin daha önce çözdüğü problemlere benzeyip benzemediğini araştırır, hatırlayabildiği çözüm yollarını yeni problem için uygulamaya çalışır. Kavramsal öğrenme görüşü matematiksel bilginin direkt öğretmen tarafından öğrenciye aktarabileceğine karşı çıkarak gerçek matematiksel bilgileri içselleştirmenin öğrencinin kendisi tarafından yaptığı etkinliklerden meydana gelebileceğini savunur (Cobb, 1986; Baki, 1995; Noss ve Baki, 1996). Matematiksel kavram ve yapıların anlaşılması ve özümsenmesi, öğrencilerin kendi çabaları sonucunda meydana gelir.



Şekil 0.1. *Kavramların İlişkisi Örneği*

Şekil 1.1'de kavramaların biribiriyle ilişkisi verilmiştir. Öğrencilerin ondalık sayıları anlamlı öğrenmeleri için ondalık gösterim ve buna karşılık gelen kesir gösterimleri arasında ilişki kurması gerekir. Matematiksel kavrama yönelik ilişkiler ne kadar artarsa o oranda anlamlı öğrenmeler gerçekleşmektedir. Kavram bilgisi sadece kavramı tanımak ya da kavramın tanımını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmeyi sağlamaktadır. Kavram, kendisinin anlamını taşıdığı grup ile ilişkilendirilirse anlam meydana gelmektedir. (Baki, 2006).

Matematik derslerinde konular kavramsal bilgi ile zenginleştirilerek ele alınmadığı için anlamlı öğrenmeler yerine çoğunlukla ezbere yöntemlere başvurulmaktadır (Oaks, 1990). Birçok öğrenci, kullandıkları işlemlerin temelinde var olan kavramların ve matematiğin ne anlama geldiğinin farkında değildir. Bundan dolayı öğrenciler matematik öğrenmenin, anlamsız semboller ile işlem yapmak olduğunu benimser ve matematiği ezberleyerek öğrenme yolunu seçer. Matematiği öğrenmek, hazır bilgileri doğrudan ve ezbere zihne kaydetmek değildir. Bu bilgileri kendi düşüncelerinizi ortaya çıkaracak biçimde problem çözmede kullanmaktır. Öğrenci matematiği kavramsal yapısıyla birlikte düşünmeye başladığında başarısı da artmaktadır (Porter ve Masingila, 2000).

Anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesi içim kavramsal bilginin yanında işlemsel bilgiye de yer verilmelidir.

1.1.2. İşlemsel bilgi

İşlemsel bilgi , matematikte yer alan semboller, kurallar ve matematik yaparken kullanılan işlemlerin bilgisi olarak tanımlanır (Baykul, 2005).

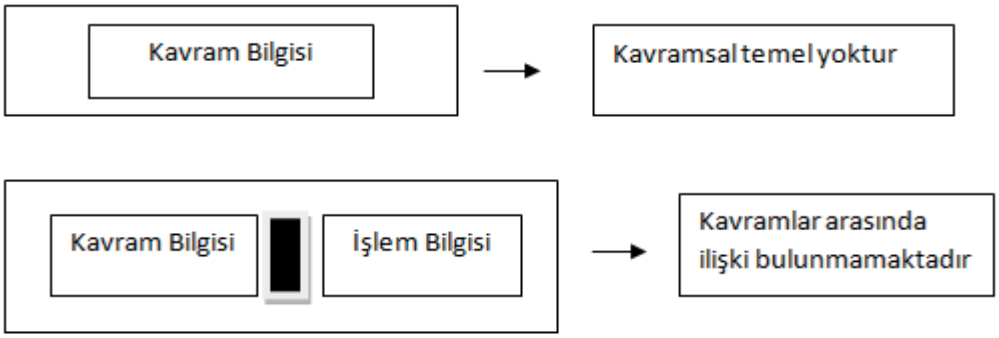
Matematiğin formal dilinde yer alan her sembol uygun kavramlarla anlam meydana getirir (Schoenfeld, 1985). İşlem bilgisi onu oluşturan iki ayrı kısımla birlikte ele alınmaktadır. İşlem bilgisinin yer aldığı birinci kısım matematiğin sembolleri ve dili temsil eden bölümünden oluşurken, ikinci kısım ise kuralları, matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan bağıntıları, somut nesneler üzerinde var olan işlemleri, görsel diyagramları, zihinsel hayalleri veya matematiksel sistemin oluşturduğu standart olmayan diğer nesneleri kapsar (Hiebert ve Lefevre,1986). İşlem bilgisi, konuya ilişkin neden ve niçin soruları ele alınmadan yalnızca kural boyutunda ezberlenerek kazanıldığı için öğretimde de genellikle kavramsal bilgilere değil işlemsel bilgilere öncelik verilir. İşlemsel öğrenme boyutu ele alındığında matematiği öğrenciye doğrudan doğruya bilgi aktarabilen bir sistem kabul ederek, öğretmeni ise kural ve yöntemleri bilen ve öğrenciye aktarımını sağlayan bir otorite olarak görmektedir (Cobb, 1986).

İşlemsel bilgi, problem çözmede kullanılan işlem adımları ve algoritmaları içeren bilgi olarak ele alınmaktadır (Star, 2005). Kavramsal bilgiden farklı olarak alanyazında bireyin işlemsel bilgiyi anlamadan da sahip olabileceği vurgulanmıştır (Skemp, 1987).

1.1.3. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkinin kurulması

Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkiyi kurma; kavramların uygun temsil edilmesi ve açıklanmasında, kurallar, yöntemler ve işlemsel bilgiyi kavramsal yapıya uygun, anlamlı muhakeme ve semboller temeli üzerine inşaa etme şeklindedir. Matematiksel süreç içerisinde, uygulanan adımlar anlamlı olmalı ve adımların uygulanma nedenleri ifade edilebilmelidir; yani oluşturulan her adımın kavramsal yapı ile ilişkisi kurulmalıdır (Van de Walle, 2004).

Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişki Skemp (1971) tarafından hiyerarşik olarak belirtilmiştir. Kavramsal bilgi işlemsel bilgiden hiyerarşik yapıda daha üst konumda benimsenmiş olmasına rağmen kavramları karşılaştırmaktan ziyade arasındaki ilişki önem arz etmektedir (Yanık, 2016). Matematik öğretimi için kavramsal ve işlemsel bilginin farklılıklarını ortaya çıkarmak yararlı olsa da matematiksel bilgilerin her birinde bu ayrımı yapmanın güç olduğu belirtilmiştir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Kavramsal ve işlemsel bilginin ayrımında kesin olarak bir çizgi bulunmadığından kavramsal bilgi işlemsel bilgiyi, işlemsel bilgi kavramsal bilgiyi kapsayabilir (Carpenter, 1986).



Şekil 0.2. *Kavramsal ve işlemsel bilgi arasında ilişki kurulmaması*

(Kaynak: Elemantary School Mathematics, Van de Walle, s.10)

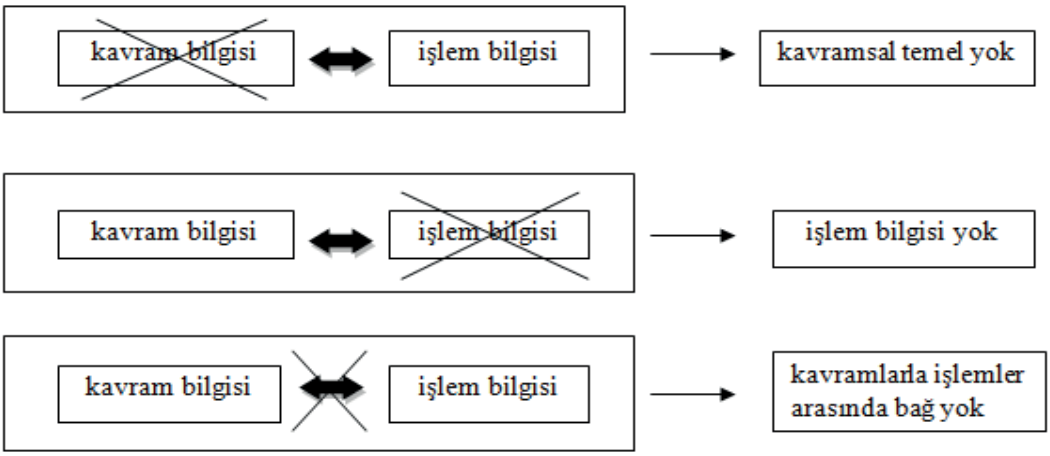
Şekil 1.2'de kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki bağın oluşturulamamasına yöneliktir. İlişkisel analamanın gerçekleştirilebilmesi için kavramsal ve işlemsel bilgi birlikte yer almalıdır. İşlemleri kural olarak öğrenme ve kavramsal ilişkiyi kuramama durumlarında kavramlar oluşmamakta ya da kavramlar oluşmuş olduğu halde işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki bağ kurulamamaktadır (Altun, 2010). İşlemsel ve kavramsal bilgi bireyin kavramsal bilgileri kategorisinde oluştuğunda işlemlerin ve kuralların nasıl yapıldığına ek olarak neden yapıldığına dair açıklamalar ve anlamalar meydana gelir.

Matematik öğretiminin inşaası açısından aşağıdaki üç duruma yönelik olması belirtilmektedir (Van de Walle, 1989).

Öğrencilerin;

- matematiksel kavramları anlamalarını
- matematiksel işlemleri anlamalarını
- kavram ve işlemler arasındaki bağı kurmalarını amaçlanmalıdır.

Matematik öğretimi esnasınsa kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi birlikte önemli arz etmektedir. İşlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki bağı oluşturamayan öğrenciler, matematikteki kavramsal yapıları yanlış yapılandırmakta ve matematiğin öğretiminde çeşitli zorluklarla karşılaşmaktadır (Ersoy ve Erbaş, 2002) Bu güçlüklerin yaşanmaması açısından kavramlar ve işlemler bilgisi dengeli bir şekilde oluşturulmalıdır.



Şekil 0.3. *İlişkisel anlama*

(Elemantary School Mathematics, Van de Walle, s.10'dan uyarlanmıştır.)

Şekil 1.3'te ilişkisel anlamanın gerçekleşmesi için kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki bağın oluşturulmasına dikkat çekmektedir. İşlemsel bilgide, bir kavram ya da işlemin nedenini bilmeye gerek görmeden sadece nasıl kullanılacağını bilmek durumu söz konusu iken, kavramsal bilgide kavrama durumu dikkate alınmaktadır (Baki, 1997).

Baykul(1993)'e göre kavramsal ve işlemsel bilgi arasında bağ oluştuğu zaman öğrenme üzerine etkileri aşağıda verilmiştir.

1. Öğrenme eğlenceli bir şekilde gerçekleşir, birey öğrenmeden zevk duyar.
2. Öğrenilen bilgilerin hatırlanması kolaylaşırken kalıcı öğrenmeler meydana gelir.
3. Yeni kavramların öğrenilmesi kolaylaşır ve bireysel öğrenmeye olumlu katkısı vardır.
4. Bireyin problem çözme becerisine katkı sağlar.
5. Matematiğe yönelik kaygı azalırken bireyin özgüveninde artış görülmektedir.

Matematiğin temel konularından olan limit ve süreklilik kavramları ve bu kavramların öğretimi önem arz etmektedir.

1.1.4. Limit ve süreklilik kavramları ve öğretimi

Limit tanımı, anlamına Karl Theodor Wilhem Weirstrass'ın katkıları sayesinde günümüzdeki halini almıştır. Bolzano, Abel ve Cauchy'nin çalışmalarını kurallarla ilişkilendirme çabasını geliştirmiş, aynı zamanda bir sayı dizisinin limiti, sürekli değişken gibi kavramlara yönelik henüz yeteri kadar açık olmayan formülleri aritmetik eşitsizlikler biçiminde belirtmiştir. Ek olarak limit kavramına ilişkin $\varepsilon-\delta$ gösterimini

kullanmıştır (Sanchez, 1996). Limit kavramı günümüzdeki haline çalışmaların birikimi sayesinde gelmiştir.

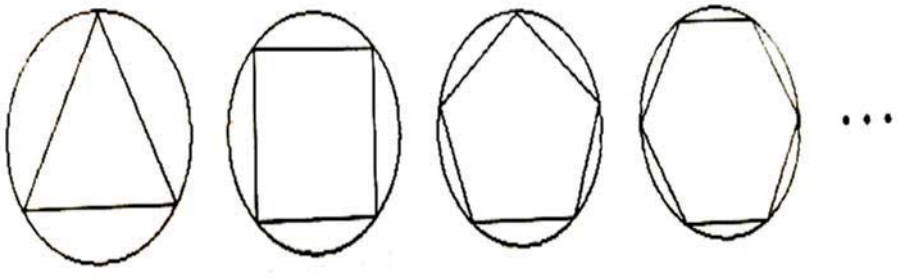
Limit ve süreklilik kavramları matematiğin analiz dalına ait her konusuna değinen en temel kavramlar olarak belirtilmiştir (Artigue, 2000). Sahip olduğu bu öneme karşın matematik öğretiminde yapılan çalışmalar, öğrencilerin cebir ve aritmetiksel metotlar kullanarak sonuca ulaşmada en çok zorlandığı kavramların limit ve süreklilik olduğunu göstermektedir (Cornu, 1991; Cottrill vd., 1996; Przenioslo, 2004; Roh, 2007; Tall ve Vinner, 1981). Kavramların soyut ve zor olması öğrencilerin bu konularda güçlük yaşamasına neden olmaktadır.

Öğrenciler, limit kavramını belli bir seviyeye kadar kullanabilmelerine rağmen kavramın oluşturulabilmesi ile ilgili üst düzey aşamalarda zorluklar yaşadıklarını belirten araştırmalar neticesinde öğrencilerin limit kavramını oluşturmada yaşayabilecekleri sorunlar:

1. Fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamak,
2. Fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığını gösterebilmek,
3. Fonksiyonla limitin ilişkisini kurabilmek,

şeklinde belirtilmiştir (Barbé vd., 2005; Çıldır, 2012; Gürbüz vd., 2011; Hofe, 1997).

Öğrencilerin, limit kavramını anlamalarına ve yapılandırmalarına katkı sağlayan birçok araştırma ve yaklaşımlar bulunmaktadır (Bukova, 2006). Bu yaklaşımlardan biri de geometrik gösterimi içermektedir. Bu yöndeki çalışmalar ile, öğrencilerin limit kavramını anlamalarına destek olmak için geometrik gösterimlerin olası bir yaklaşım olarak kullanılabileceği ifade edilmektedir.



Şekil 0.4. *Limitin kavramsal açıdan anlaşılması*

$$\lim_{n\to\infty}(n\ kenarlı\ düzgün\ çokgen) = çember$$

Şekil 1.4'te köşeleri çember üzerinde bulunan n kenarlı düzgün çokgenin kenar sayısının arttırılması ile şeklin nasıl bir yaklaşımda bulunacağına ilişkin araştırma yapılmaktadır (Bukova, 2006). Kenar sayısının arttırılması ile çember yayı ile kirişlerin arasında kalan alanın kenar sayısı arttıkça bu iki kavram arasında kalan alanın azaldığı ve kenar sayısı n olabildiğince büyük değerler aldığında çember ve n kenarlı düzgün çokgenin çakıştığı sezdirilmektedir (MEB, 2005). Örnek kavramsal anlamayı sağlama ve disiplin içi bağı kurması açısından önem teşkil etmektedir. Öğrencilerin limit alırken $n \to \infty$ ifadesinin anlamını sürekli artan değerler olarak yorumlaması farklı temsiller kullanılarak sağlanabilmektedir.

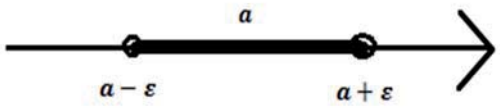
Tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramına geçilmeden önce komşuluk kavramına yer verilmesi kavramın öğrenilmesi açısından önem arz etmektedir. Komşuluk ve delik komşuluk kavramları limit tanımı için önemli kavramlar olup öğrencilerin zorluk yaşadıkları kavramlardan birini oluşturur (Baş vd., 2015). Limit tanımının yeterince anlaşılması için komşuluk ve delik komşuluk tanımları önemli kavramlardır.

Limit tanımına yer vermeden önce komşuluk tanımına değinmek gereklidir.

$a \in \mathbb{R}\ ve\ \varepsilon > 0$ olmak üzere a noktasının ε komşuluğu

$$N(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır.

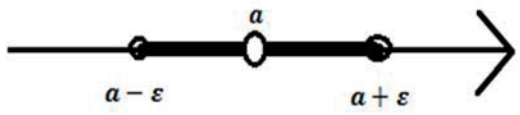


Şekil 0.5. *a noktasının ε komşuluğu*

Şekil 1.5'te a noktasının ε komşuluğu görsel temsille ifade edilmiştir. Böylelikle adayların tanımı öğrenirken zihinsel şemalarında anlamlı ve kalıcı öğrenmeler gerçekleştirmesi beklenmektedir. Komşuluk kavramı ve limitin formal tanımındaki $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$ eşitsizliği arasındaki ilişkinin kurulması ile limit kavramı daha anlaşılır hale gelmektedir (Kabael, Barak ve Özdaş, 2015). Komşuluk kavramına değinmenin ardından delinmiş komşuluk kavramına yönelik tanıma vurgu yapılarak ilişkilendirilir.

a noktasının delinmiş $\mathcal{E}$ komşuluğu ise;

$$N(a,\varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 < |x-a| < \varepsilon\} \setminus \{a\}$$



Şekil 0.6. *a'nın delinmiş ε komşuluğu*

Şekil 1.6'da a'nın delinmiş komşuluğunun görsel temsili ifade edilmiştir. Tek değişkenli fonksiyonlarda komşuluk kavramı ifade edildikten sonra limit ve süreklilik kavramlarının tanımına yer verilmektedir. Limit kavramının *informal (sezgisel)* ve *formal* (ε-δ) olmak üzere iki tanımı yapılabilir.

Bir f fonksiyonu a noktası civarındaki tüm x değerleri için tanımlı (a noktasında tanımlı olmak zorunda değil) olsun. *x, a*'ya yeterince yaklaştığında, *f(x)* de bir L reel sayısına yaklaşıyorsa " *x, a*'ya giderken *f(x)*'in limiti L'dir." denir ve

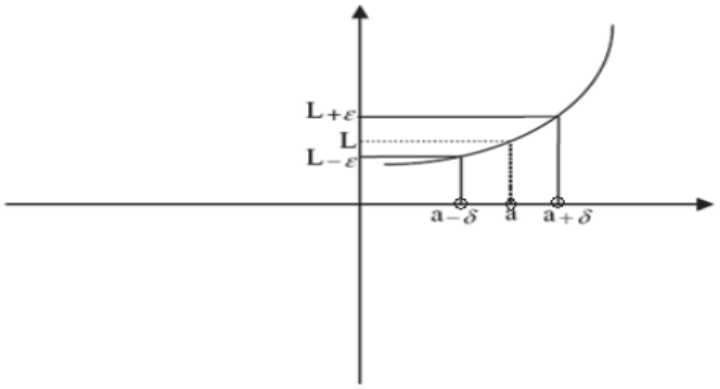
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

şeklinde temsil edilir (Adams,1999). Bu tanım matematikçiler arasında sezgisel olarak ifade edilmektedir. Çünkü tanım içerisinde "yeterince yaklaşıldığında" veya "reel sayısına yaklaşıyorsa" ifadelerinde geçen "yaklaşma" kelimesinden nicelik olarak ne anlaşılması gerektiği çok açık değildir (Arslan ve Çelik, 2015).

Limitin formal tanımı ise; $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tek değişkenli fonksiyonu x_0 noktasının delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ olmasıdır. Bu durumda f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti L' dir denir ve

$$\lim_{x - x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir.



Şekil 0.7. *Tek değişkenli fonksiyonlarda limit*

Şekil 1.7'de tek değişkenli fonksiyonun a noktasının delinmiş komşuluğunda limitinin L olmasına yönelik görsele yer verilmiştir.

Limit tek taraflı limitler şeklinde ifade edilerek sağdan limit ve soldan limit şeklinde ele alınmaktadır. Sağdan limit; $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tek değişkenli fonksiyonu $\boldsymbol{x_0} \boldsymbol{\epsilon} \mathbb{R}$ noktasının sağ komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun. $\boldsymbol{f}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{x_0}$ noktasındaki sağdan limitinin M olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \boldsymbol{\delta} > 0$ öyle ki $\boldsymbol{x_0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_0} + \delta \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{M}| < \varepsilon$ olmasıdır. Bu durumda $\boldsymbol{f}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{x_0}$ sağdan limiti M' dir denir ve

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = M$$

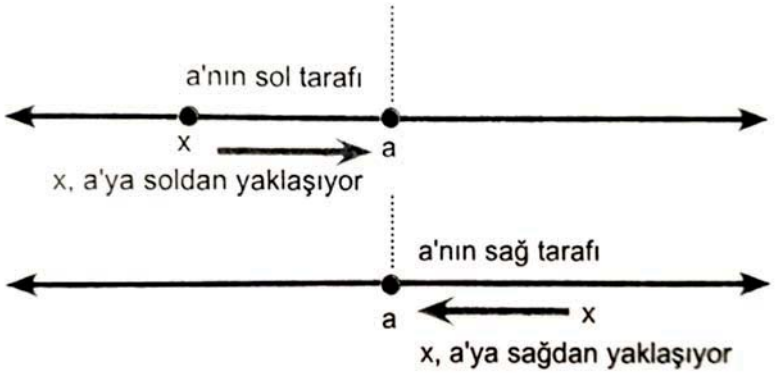
ile gösterilir.

Soldan limit tanımı ise; $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tek değişkenli fonksiyonu $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ noktasının sol komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki soldan limitinin N olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ öyle ki

$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - N| < \varepsilon$ olmasıdır. Bu durumda f fonksiyonunun x_0 soldan limiti N' dir denir ve

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = N$$

olarak gösterilir.



Şekil 0.8. *x 'in a noktasına sağdan ve soldan yaklaşımı*

Şekil 1.8'de x, a'ya soldan yaklaşırken a'dan küçük reel sayıların f altındaki görüntüleri bir N reel sayısına yaklaşıyorsa soldan yaklaşım, x a'ya sağdan yaklaşırken a'dan büyük reel sayıların f altındaki görüntüleri M reel sayısına yaklaşıyorsa sağdan yaklaşım şeklinde ifade edilir.

Limit konusunda sonsuz kavramı anlaşılması güç noktalardan birini oluşturmaktadır. Limit konusunda sonsuz kavramı sonsuz limit ve sonsuzda limit kavramları ile ele alınmaktadır. $x \to x_0$ iken $f(x) \to \infty$ ya da $f(x) \to -\infty$ şeklindeki limit sonsuz limit olarak ifade edilirken $x \to \infty$ ya da $x \to -\infty$ iken $f(x) \to L$ şeklinde tanımlanan ise sonsuzda limit kavramı şeklinde ifade edilir.

Sonsuz limit ve sonsuzda limit kavramları aşağıda ifade edilmektedir.

$\boldsymbol{f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ *tek değişkenli fonksiyonu verilsin.*

1. $\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0}$ *için* $\boldsymbol{\exists \delta > 0 \ \ni \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M}$.
2. $\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0}$ *için* $\boldsymbol{\exists \delta > 0 \ \ni \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow f(x) < N}$.

Sonsuzdaki limitler ise;

$\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f(x) = L \ \Leftrightarrow, \forall \varepsilon > 0}$ *için* $\boldsymbol{\exists R > 0 \ \ni x > R \ için |f(x) - L| < \varepsilon}$ *olur.*

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \ \Leftrightarrow, \forall \varepsilon > 0$ için $\exists P < 0 \ \ni x < P$ *için* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *olur.*

(Kabael, 2017).

Analiz 1'in temel konularından birini de tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik oluşturmaktadır.

$\boldsymbol{f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ tek değişkenli fonksiyonu *ve* $\boldsymbol{x_0 \in D_f}$ noktası verilsin. $\boldsymbol{f}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{x_0}$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

olmasıdır. (Kabael, 2017).

Limit ve sürekliliğin anlamlı hale dönüşmesi için fonksiyon kavramının ele alınması önem teşkil etmektedir.

$A \subset R^2$ olmak üzere

$$f: A \to R,\ (x,y) \to f(x,y)$$

fonksiyonuna iki değişkenli fonksiyon denir ve $z = f(x,y)$ ile gösterilir (Tekcan, 2013).

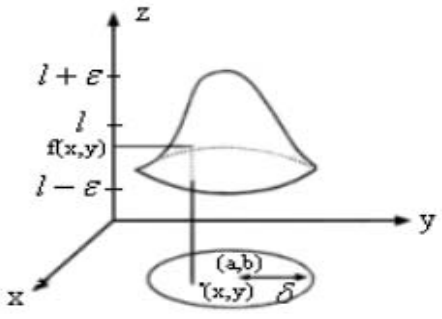
İki değişkenli fonksiyonlarda limit analizin önemli konularından birini oluşturmaktadır. İki değişkenli fonksiyonlarda limitin tanımı ise; $f: A \subset R^2 \to R$ fonksiyonu $(x_0, y_0) \in A$ noktasının delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun. f fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki limitinin L olması için gerekli yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0\ \ni 0 < |(x,y) - (x_0, y_0)| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

olmasıdır. Bu durumda f' nin (x_0, y_0) noktasındaki limiti L' dir denir ve

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ile gösterilir.



Şekil 0.9. *İki değişkenli fonksiyonlarda limit*

Şekil 1.9'da iki değişkenli fonksiyonlarda limitin ifade edilmesine yönelik görsel yer almaktadır.

İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik tanımı ise; $f: A \subset R^2 \rightarrow R$ fonksiyonu $(x_0, y_0) \in A$ noktasının delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun. f fonksiyonunun (x_0, y_0)noktasında sürekli olması için gerekli yeterli koşul

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = f\,(x_0, y_0)$$

olmasıdır.

z = *f (x, y)* fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyona A kümesi üzerinde sürekli fonksiyon denir.

1.2. Amaç

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularına yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesidir.

1.3. Önem

İlköğretim matematik öğretmen programının içeriği alan bilgisi, meslek bilgisi ve genel kültür bilgisini içermektedir. Limit ve süreklilik konuları ise alan bilgisinin temelini oluşturmakta olup bu temel konuların işlemsel ve kavramsal öğrenmenin gerçekleştirilmesi açısından ışık tutacaktır. İlköğretim Matematik Öğretim Programına yönelik araştırma birikimine katkı sağlaması bakımından önemlidir.

1.4. Varsayımlar

Araştırmada kullanılan ölçme araçlarının kapsam geçerliliği için başvurulan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmıştır.

1.5. Sınırlılıklar

Araştırma 2017- 2018 öğretim yılı içerisinde bir devlet üniversitesinin İlköğretim Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı ikinci sınıf güz dönemi Analiz 1 ve bahar dönemi Analiz 2 dersini tamamlamış, her iki dersi alan otuz öğretmen adayından elde edilen verilerle sınırlıdır. İçerik bakımından tek ve iki değişkenli fonksiyonların limit ve süreklilik konuları ile sınırlıdır.

1.6. Tanımlar

- **Kavramsal Bilgi:** Nesnelerin veya olayların ortak özelliklerini içeren ve bir ortak ad altında toplayan bilgidir.

- **İşlemsel Bilgi:** Matematiksel semboller, kurallar ve uygulanan işlemlerin bilgisi.
- **Formal Tanım:** Bir matematiksel kavramın evrensel olarak kabul görmüş, matematik otoritelerince benimsenmiş ve basılı kaynaklara geçmiş hali (Kabaca, 2006).
- **İnformal Tanım:** Matematiksel kavramların, bireyin kendine has cümleleri ile kendi anladığı biçimde tanımlamalarıdır (Kabaca, 2006).

2. ALANYAZIN

2.1. Limit ve Süreklilik, İşlemsel ve Kavramsal Bilgi Kavramlarına Yönelik Yapılan Yayın ve Araştırmalar

Araştırmanın bu bölümünde limit ve süreklilik, işlemsel ve kavramsal bilgi kavramları ile ilgili yurt içi ve yurt dışında yapılan akademik araştırmalardan bir kısmı özet şeklinde yer alacaktır.

Soylu ve Aydın (2006), bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi İlköğretim Sınıf Öğretmenliği Anabilim Dalında yer alan üçüncü sınıf 100 öğretmen adayı ile matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine çalışmada bulunmuştur. Öğretmen adaylarına 10 açık uçlu sorunun yer aldığı test uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının verdiği cevaplar incelenmiş ve yapılan görüşmeler sonucunda elde edilen veriler ışığında öğretmen adaylarının işlemsel bilgiyi ölçen soruları doğru yanıtlama oranı yaklaşık olarak %74 iken, kavramsal bilgileri ölçen sorulara yönelik doğru cevap oranları %26'dır. Elde edilen sonuçlar ile matematik öğretiminde öğretmen adaylarının kavramsal ve işlemsel öğrenme açısından denge oluşturamadıkları, dolayısıyla kavramsal ve işlemsel öğrenme arasında denge oluşmadığından konuların kavramsal yönden öğrenilemediği tespit edilmiştir.

Biber ve Argün (2012), bir devlet üniversitesinde yer alan matematik öğretmenliği ikinci sınıf, 37 öğretmen adayı ile matematik öğretmen adaylarında iki değişkenli fonksiyonların limit kavramının yapılandırılmasının incelenmesi adlı çalışması bulunmaktadır. Araştırmada öğretmen adaylarına açık uçlu soruların yer aldığı anket uygulanmıştır ve bazı öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının, limit konusunu iki değişkenli fonksiyonlarda nasıl inşaa ettiklerinin incelendiği bu araştırmada elde edilen verilere göre limitin iki değişkenli fonksiyonlarda, limit alınan noktaya yaklaşma biçiminden bağımsız olduğu ifadesini adayların matematiksel yönden kavrayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcıların limit ve süreklilik ile ilgili standart sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde işlemsel bilgi yönünden başarılı oldukları görülmüştür. Yapılan görüşmeler sonucunda, öğretmen adayları kendileri için kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinin değil dersten geçilmesinin daha önemli olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının matematiksel alan uzmanlığına sahip olunmasının önemini kavramadıkları ortaya çıkmıştır.

Dönmez (2009), matematik öğretmen adaylarının fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerini incelemiştir. Çalışmanın

katılımcılarını 2008-2009 öğretim yılında Marmara Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümü dördüncü sınıfta okuyan dört öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırma nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması ile oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarına limit ve süreklilik konularına yönelik alan bilgi anketi uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının fonksiyonun bir noktadaki limitin varlığını ifade ederken o noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiğini ifade ederek kavram yanılgısı yaşadıkları görülmüştür. Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini, bu fonksiyonun olabildiğince yaklaştığını ancak hiçbir zaman ulaşamadığı bir değer olarak ifade etmişlerdir. Dolayısıyla elde edilen veriler ile araştırmaya katılan öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularına ilişkin kavram yanılgıları yaşadıkları görülmüştür. Pedagojik alan bilgilerinin eksik olduğu yapılan çalışma ile belirlenmiştir.

Barak (2007), üniversite öğrencilerinin limit konusuna yönelik kavram yanılgılarını ortaya çıkaran bir çalışma yapmıştır. Çalışmanın katılımcıları bir devlet üniversitesinde yer alan 34 matematik öğretmenliği 1. sınıf, 30 matematik öğretmenliği 5. sınıf,12 fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf ve 30 bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. Araştırma sonucunda öğrencilerin limit ve limitle ilişkili bazı kavramlar açısından kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Kavram yanılgı görülen noktalar ise limitin ε-δ tanımı, limit kavramının tanımı, fonksiyonun bir noktasındaki limitinin varlığı, sağdan ve soldan limit kavramlarının anlamı, limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki, bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması, fonksiyonların grafiklerinin çizimi, sonsuz kavramının anlaşılması ve işlemlerde kullanılmasıdır.

Biber (2010), ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkilerin incelenmesi adlı doktora tezinde ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili tek değişkenli fonksiyonlardaki kavram bilgileri ile çok değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgileri arasında bir ilişkinin olup olmadığını araştırmıştır. Adayların çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgilerini yapılandırırken, tek değişkenli fonksiyonlarda oluşturdukları kavram bilgilerinin etkileri ve adayların yürüttükleri matematiksel genelleme ve soyutlama süreçlerinde yaşadıkları sıkıntılar ve sebepleri ele alınmıştır. Adaylar iki değişkenli bir fonksiyonun her hangi bir değişkeninin sabit bir değer olması durumunda fonksiyonun tek değişkenli bir fonksiyon gibi görmekte zorlanmadıkları, iki değişkenli

bir fonksiyonu tek değişkenli hale getirebildiklerinde, elde edilen fonksiyonun limitini tek değişkenli fonksiyonların limitini bulurken kullandıkları pratik yöntemlerle çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Adayların, limit ve süreklilik konularına yönelik standart sorulara verdikleri yanıtlarda işlemsel bilgilerinin iyi olduğu ortaya çıkmıştır. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit bulmak için çoğunlukla yerine koyma metodu tercih edildiğinden, adayların iki değişkenli fonksiyonların limitini bulurken en çok iki farklı yoldan yaklaşım biçimini tercih ettikleri görülmektedir. Tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkında sağlam kavram bilgisine sahip olan adayların çoğu, iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için ne gerekir sorusuna cevap vermekte çekimser kaldıkları belirtilmiştir. Grafiği verilen bir fonksiyonun istenen noktalarda sürekliliğinin incelenmesinde adayların çoğunlukla doğru karar verebildikleri gözlemlenmiştir. "Düzlemde tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limit ve sürekliliğinin olup olmadığını incelemek için fonksiyonun hangi belirgin özelliklerinden faydalanılır?" sorusunun süreklilikle ilgili kısmına çalışmaya katılan 52 adaydan yorumda bulunmayan 4 kişi hariç tümünün doğru cevaplar vermesi dikkat çekmiştir.

Tall ve Vinner (1981), 41 öğrencinin katılımı ile gerçekleştirdikleri çalışmada $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x \neq 0$ iken sürekliliği hakkında öğrencilerin 6'sı verilen fonksiyonun sürekli olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin verdiği cevaplar sonucunda fonksiyonun sürekli olmama nedeni için grafiğin tek bir parçadan oluşmaması, fonksiyonun orjinde sonsuz olması şeklinde ifadeler kullanmışlardır. Çalışmada öğrencilerin fonksiyonların sürekliliğinin tek bir formülle ifade edildiğini düşündükleri ortaya çıkmıştır. Öğrencilere farklı grafikler sunulmuştur ve süreklilik hakkında gerekçeli açıklamalar yapmaları istenmiştir. Öğrencilerin sunduğu dikkat çekici gerekçelerden biri sürekli fonksiyonlar ile fonksiyonun cebirsel gösterimleri arasında kurmuş oldukları ilişkidir. Birkaç öğrenci ise grafiğin tek parça olmasına rağmen denkleminin bir formülle ifade edilmemesini gerekçe göstererek fonksiyonun süreksiz olduğunu ifade etmiştir. Öğrenciler süreklilik ile fonksiyon denklemi arasında ilişkisiz bir bağ kurdukları ortaya çıkmıştır.

Jordaan (2005) yapmış olduğu araştırmada öğrencilerden " Fonksiyon belli bir noktada limite sahip olmayabilir." ifadesini değerlendirmelerini istemiştir. 42 öğrencinin katıldığı çalışmada 17 öğrenci verilen ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Bu yanıtı veren öğrencilerin limit kavramını içselleştirirken fonksiyon kavramı ile ilişkilendirdikleri görülmüştür. Öğrenciler fonksiyonun limitinin olması için verilen

fonksiyonun sürekli olması ön koşuluna sahip olması gerektiğini ifade etmiştir. Jordaan, " Limit istenildiği kadar kesin yapılabilecek olan bir yaklaştırma belirtir." ifadesinin doğru olup olmadığının belirtilmesini istemiştir. 42 öğrenciden 24 kişi bu soruya yanıt olarak ifadenin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Araştırmasında $f(x) = \frac{x^2-9}{3x-9}$ fonksiyonunun $x \to 3$ için limitini sormuş ve 42 öğrencinin verdiği yanıtları incelemiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerden 8 kişi fonksiyonun x=3 noktasındaki değerinin 0'a eşit olduğunu, 9 öğrenci fonksiyonun grafiğinin *x=3*'te sürekli olduğunu, 15 öğrenci *x=3*'te limitinin var olmadığını ve 9 katılımcı ise fonksiyonun *x=3*'teki değerinin 2 veya 3'e eşit olacağını belirtmiştir. Bu durumda öğrenciler limit konusunda belirsizlik durumu ile karşılaştıklarında anlamlandıramadıkları işlemler yaptıkları görülmüştür.

Ubuz (1999) araştırmasında, son zamanlarda analiz ile ilgili yapılan araştırma sayısının artış göstermesinin nedenlerini aşağıda verilmiştir:

1) Ezbere işlem kullanımına yönelim
2) Kavramsal anlamada görülen yetersizlik
3) İleri matematik öğretim ve öğreniminde kaliteyi yükseltme

Ferrini-Mundy ve Graham (1989) araştırmasında, öğrencilerden verilen bir fonksiyonun istenen bir noktadaki limit değerini bulmaları istendiğinde öğrencilerin başarılı oldukları görülmüştür ancak limitin geometrik yorumu konusunda öğrencilerin limit konusuna yönelik başarısız oldukları, cebirsel ve grafiksel gösterimlerin birbirinden bağımsız olduğunu belirttikleri görülmüştür. “Yaklaşma” kavramı yapılan bir görüşmede öğrencilere sorulmuştur ve yaklaşmanın limiti anlamanın bir parçası olmadığı ifade edilmiştir. Görüşme yapılan öğrencilerden biri limit problemlerinde “grafiğin cevabı bulmada yardımcı olmadığını” yalnızca fonksiyonların değerlerini bulmada gerekli olduğunu belirtmiştir.

Heid (1988), araştırmasında iki öğrenci grubunun limiti anlamalarında benzer zorluk yaşadıklarını ifade etmiştir. Bir gruba grafik ve sembollerin bilgisayar programları kullanılarak diğer gruba ise daha geleneksel yöntemler kullanılarak öğretim yapılmıştır. Her iki grubun da limit kavramının belirlenmesinde bir sayıdan çok yapılan işleme, yaklaşılan sayıdan çok “yaklaşmaya” odaklandıkları ortaya çıkmıştır.

Queseda vd. (2008)'nin limit kavramında öğretim deneyimleri neticesinde öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri aşağıdaki gibi ifade etmektedirler:

1. Limit tanımında yer alan niceleyici kullanımı ve limitin varlığını kanıtlamadaki rolünün öğrenciler açısından yeni olması,

2. Öğrencilerin matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisindeki eşitsizlikleri, cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki ilişkiyi anlamaya imkan vermemesidir. Neticede, limit kavramında eşitsizlikleri kurmada güçlükle karşılaşması,

3. Limit kavramı içerisindeki eşitsizliklerde, öğrencilerin değişkenlerin değer aralıklarını bulmada ve ε, δ değişkenlerine yönelik ilişkinin belirlenmesinde cebirsel değişiklik yapmada güçlükle karşılaşmasıdır.

Lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerin işlem ve kavram bilgisi açısından değerlendirmek amacıyla yürütülen bir araştırma ülkemizdeki mevcut okul matematiğinin bir resmini göstermektedir (Baki ve Kartal, 2004). Bu araştırma ile öğrencilerin ortaya koydukları ürünler gözlemlenmiştir ve geliştirilen karakterizasyon ölçeğine göre yorumlanmıştır. Karakterizasyon ölçeği konuyla ilgili alan yazında (Skemp, 1971; Schoenfeld, 1985; Hiebert ve Lefevre, 1986; Ernest, 1991) yapılan işlemsel ve kavramsal bilginin tanımlarından ve sınıflandırmalarından yararlanılarak geliştirilmiştir.

İşlem bilgisi ile ilgili kriterler:

1. İşlemleri adım adım gerçekleştirme.

2. Var olan matematik bilgilerini (teorem, tanım, önerme, özellik ve bağıntı) bilgi seviyesinde uygulayabilme.

3. Cebirsel bağıntıyı ve temel işlemleri kullanabilme.

Kavram bilgisi ile ilgili kriterler:

1. Matematikte yer alan temel kavramları ve bu kavramların anlamını bilme

2. Sorunun içeriğini kavrayarak verilen ve istenenler arasında mantıklı ilişki kurarak çözüm yolu bulma

3. Öğrenilmiş matematiksel bilgileri (tanım, önerme ve teorem) kavrama veya uygulama düzeyinde kullanabilme.

4. Soruyu bir bütün şeklinde alarak verilen ipuçlarını yerinde ve doğru bir şekilde kullanabilme.

5. Problemi basitleştirme ve alt basamaklara ayırabilme.

6. Karmaşık ve zor görünen bir problemin çözümüne yardımcı olacak diyagramlar çizme veya genellemelerde bulunabilme.

7. Problemi verilen diyagram ve grafikle eşleştirebilme.

8. Problemin yapsını ortaya koyarak problemi bu yapıları içeren bilgilerle eşleştirebilme.

İşlem ve kavram bilgisini birlikte ele alan kriterler:

1. Matematiğin dilini oluşturan sembol ve ifadeleri anlayabilme, kullanabilme, yazabilme, kısaltabilme ve sadeleştirme.

2. Verilen problemin denkleme dönüştürülüp oluşan denklemi çözebilme ve çözümlerin muhakemesini yapabilme.

3. Verilen bağıntıların kendi aralarında ilişkilendirerek yeni bir bağıntıya dönüştürebilmesi.

3. YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Modeli

Nitel araştırma, herhangi bir sosyal olgu veya durumun özgün yönlerini doğal ortamda tümevarımcı yönden inceleyen, araştırmaya katılanların duygu, düşünce ve görüşlerini anlamlandırmak için oluşturulan bir çalışmadır. Çalışılan ortamın doğal ortam açısından duyarlı olması; araştırma yapanların çalışmada katılımcı, gözlem yapan gibi aktif bir rol üstlenmesi; kapsayıcı bir bakış açısına sahip olunması; araştırmaya katılımcı olarak dahil olanların duyguları, fikirleri ve algılarının açıklanması; esnek araştırma desenine sahip olması nitel araştırmaları nicel araştırmalardan ayıran önemli özelliklerden biridir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda ilköğretim matematik öğretmenliği adaylarının kavramsal ve işlemsel bilgilerini incelemeyi amaçlayan bu araştırmada elde edilen verilerin toplanması, analizi ve yorumlanması için eğitim araştırmalarında genellikle kullanılan temel nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Görüşme, gözlem ve döküman incelemelerinde kullanılan sorular, seçilen odak noktaları ve kurulan ilişkiler temel nitel araştırmanın kuramsal çerçevesine bağlı olarak uygulanmaktadır (Merriam, 2009). Araştırmada veri toplamak amacıyla araştırmaya katılacak öğretmen adaylarına uzmanlar tarafından hazırlanmış ve uzman görüşü alınmış açık uçlu sorular sorulmuştur. Bilimsel araştırma için gerekli yasal izinler alınmış olup sosyal ve beşeri bilimler bilimsel araştırma ve yayın etiği kurulu karar belgesi Ek-3'te yer almaktadır.

3.2. Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın katılımcılarını, güz ve bahar eğitim öğretim dönemini içeren bir devlet üniversitesinde İlköğretim Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı ikinci sınıfında Analiz 1 ve Analiz 2 derslerini tamamlayan ve her iki dersi alan 30 öğrenci oluşturmuştur.

3.3. Araştırmanın Veri Toplama Aracı

Analiz 1 ve Analiz 2 dersleri kapsamında tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konuları detaylı işlenmiştir. İlgili ders işlendikten sonra öğretmen adaylarının konuyu işlemsel ve kavramsal açıdan nasıl yapılandırdıklarını ele almak için açık uçlu sorular sorulmuştur ve açık uçlu sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir. Analiz 1 ve Analiz 2 derslerinin temel konularından biri olan limit ve sürekliliğe yönelik açık uçlu sorularda kavramsal bilgi, işlemsel bilgi ve öğrencilerin grafiği limit ve süreklilik açısından değerlendirmesi sorularına yer verilmiştir. Açık uçlu sorulardan

elde edilen başarı puanlarına göre öğretmen adaylarının yanıtları tam yapanlar, yarım yapanlar ve yanlış yapanlar şeklinde gruplara ayrılmıştır. Çalışmadaki açık uçlu sorular Ek-1 ve Ek-2 'de yer almaktadır.

3.4. Verilerin Analizi

Bu çalışmada, elde edilen bulguların yorumlandırılmasında içerik analizi tekniği benimsenmiştir. İçerik analizinin temel amacı, toplanan verileri açıklayabilecek kavramalara ve ilişkilere ulaşmayı hedefler. İçerik analizinde temelde yapılan işlem, benzer bulguları belirli kavramlar ve olgular kapsamında bir araya getirmek ve bunları okuyucuya anlaşılır bir şekilde organize ederek sunmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). İçerik analizi ile verilerin tanımlanması ve verilerin içinde var olan gerçeklerin ortaya çıkarılması benimsenir (Gülbahar ve Alper, 2009). İçerik analizinin en belirgin özellikleri; berlirli takip edilen bir uygulama standardının olmaması, analizlerin kuralları belli bir doğrusal düzlemde götürülememesi ve bu yöntem ile yürütülen bilimsel araştırmanın araştırmacısının becerisi, bakış açısı, analitik becerisi ve beklentisine göre değişiklik göstermektedir (Elo ve Kyngas, 2008). İçerik analizi, araştırmacıya hem nitel hem de nicel analiz yapma olanağı tanımaktadır. İçerik analizi, elde edilen nitel araştırma verilerinin işlenmesini, işlenen verilerin kodlanmasını, temaların bulunmasını, kod ve temaların organize edilmesini, verilerin tanımlanmasını ve yorumlanmasını ifade eden dört aşamadan oluşmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Yıldırım ve Şimşek'e (2016) içerik analizi aşağıdaki aşamalardan oluşmaktadır.

Verilerin kodlanması: İçerik analizinin ilk basamağını oluşturur. Bu aşamada, araştırmacı elde ettiği bilgileri inceleyerek, anlamlı bölümlere ayırmaya ve her bölümün kavramsal olarak ne anlam ifade ettiğini belirtir. Bu anlam sözcük, cümle veya paragraf ile ifade edilebilir.

Temaların bulunması: Verileri açıklayabilen ve kodları belirli kategoriler altında toplayabilen temaların bulunması gereklidir. Öncelikle kodlar incelenir ve ortak yönleri bulunmaya çalışılır. Oluşan temalar daha genel bir olguyu meydana getirir.

Verilerin kodlara ve temalara göre düzenlenmesi ve tanımlanması: Verilerin düzenleneceği bir sistem oluşturulur ve bu sisteme göre araştırmacı verileri sistematize eder, belirli olgulara göre verileri tanımlamak ve yorumlamak gerekebilir. Bu aşamada araştırmacı kendi görüş ve düşüncelerine yer vermez, elde edilen verileri okuyucuya iletir.

Bulguların yorumlanması: Ayrıntılı bir biçimde tanımlanan bulguların araştırmacı tarafından yorumlanması ve bazı sonuçların çıkarılması bu bölümde yer alır ve verilere anlam kazandırılır.

4. BULGULAR VE YORUM

Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularına ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgilerin incelendiği açık uçlu sorular aşağıda yer almaktadır.

4.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik Konusuna Yönelik Bulgular

Birinci sorunun a şıkkının amacı; öğretmen adaylarının tek değişkenli reel değerli bir fonksiyonun limit kavramını tanımlamaları ve bu kavrama yönelik kavramsal bilgilerinin incelenmesidir.

Adaylardan elde edilen veriler sonucunda tam yapanlar, yarım yapanlar, yanlış yapanlar olarak açık uçlu sorulardan elde edilen başarı puanlarına göre üç gruba ayrılmıştır. Tablo 4.1'de öğretmen adaylarının yanıtlarının frekans ve yüzdelik dağılımları verilmiştir.

Tablo 0.1. *Limit kavramının tanımına verilen cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	6	20
Yarım yapanlar	13	43
Yanlış yapanlar	11	37
Genel Toplam	30	%100

Öğretmen adaylarının %20'si tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramına yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. % 37'si yanlış , %43'ü yarım olarak cevaplandırmıştır. Öğretmen adaylarının bu soruya verdiği cevapları derinlemesine incelemek için soru formal tanım, informal tanım, komşuluk kavramı olarak üç farklı tema altında Tablo 4.2'de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Tablo 0.2. *Limit kavramına verilen cevapların sınıflandırılması*

	Tam yapanlar		**Yarım yapanlar**		**Yanlış yapanlar**		**Genel Toplam**
	Frekans	Yüzde(%)	Frekans	Yüzde(%)	Frekans	Yüzde(%)	
Formal Tanım	4	19	10	48	7	33	21
İnformal Tanım	2	17	3	25	7	58	12
Komşuluk Kavramı ile	2	18	2	18	7	64	11

Limit kavramının sınıflandırılması ise formal tanımı tam yapanlar " $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasının delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists\ \delta > 0$ sayısı varsa f ' nin x_0 noktasındaki limiti L' dir" koşulunu ifade etmişlerdir. İnformal tanımda ise öğretmen adayları kendi cümlelerini kullanarak tanım yapmışlardır. Öğretmen adaylarının %70'i formal tanım yapmıştır. Katılımcılar formal tanım yapmaya özen göstermiş ancak formal tanımı tam olarak doğru yapanların oranı %19'dur. Ancak formal tanımı yaparken niceleyicileri de eksik kullandıkları görülmüştür. Adayların informal tanım yapmaları kavramsal bilgi açısından önemlidir.

Komşuluk kavramına değinerek tanım yapan katılımcı sayısı %37'dir. Ancak katılımcıların %18'i komşuluk kavramını tam olarak doğru ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının % 7 ise hem formal hem de informal tanımı kullanmayı tercih etmiştir.

Kavramlar ve kavramlar arası ilişkiler yeterli düzeyde belirtilmemiştir. Elde edilen bulgunun Baki'nin 1998' de yaptığı çalışmanın verileri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları tek değişkenli fonksiyonlarda limitin formal tanımını yaparken niceleyicileri kullanan ve kullanmayanlar olarak temalara ayrılmıştır. Niceleyicileri kullanan adaylar tam doğru kullananlar, eksik kullananlar, yanlış kullananlar olarak üç temaya ayrılmıştır. Tablo 4.3'te öğretmen adaylarının cevaplarına ilişkin frekans ve yüzde dağılımları yer almaktadır.

Tablo 0.3. *Limit tanımında niceleyici kullanımı*

Limit tanımında niceleyici kullanımı		**Frekans**	**Yüzde (%)**
Niceleyici	Tam doğru kullananlar	10	%53
Kullananlar	Eksik kullananlar	4	%21
	Yanlış Kullananlar	5	%26

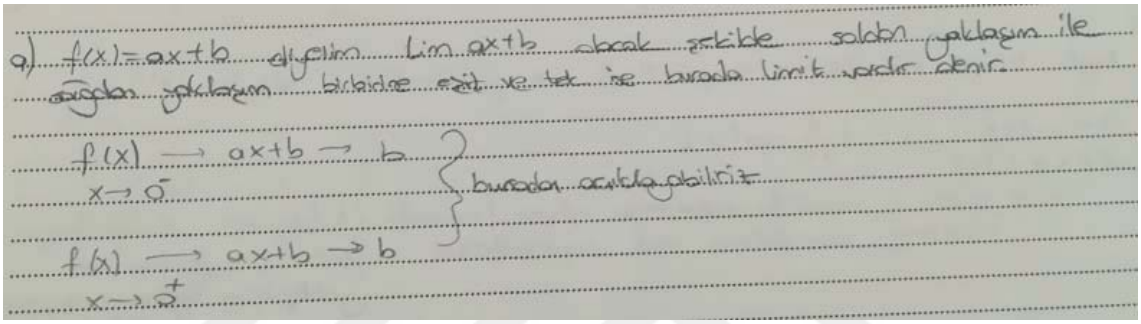
Araştırmanın katılımcılarının niceleyicileri kullananlar kategorisinde %53'ü tam olarak doğru kullanmıştır. Katılımcıların limitin formal tanımını yaparken dikkat çeken noktalardan biri "En az bir ε için" ifadesinin cevaplarda sıklıkla yer almasıdır. Öğretmen adaylarının bir bölümü tanım içerisinde yer alan niceleyicilerin yerlerini yanlış ifade etmişlerdir. Katılımcıların niceleyicileri kullanırken tam olarak konuya hakim olamadıkları görülmüştür.

Limit tanımında niceleyici kullanılmamasına ilişkin yüzde ve frekans dağılımı Tablo 4.4'te yer almaktadır.

Tablo 0.4. *Limit tanımında niceleyici kullanmayanlar*

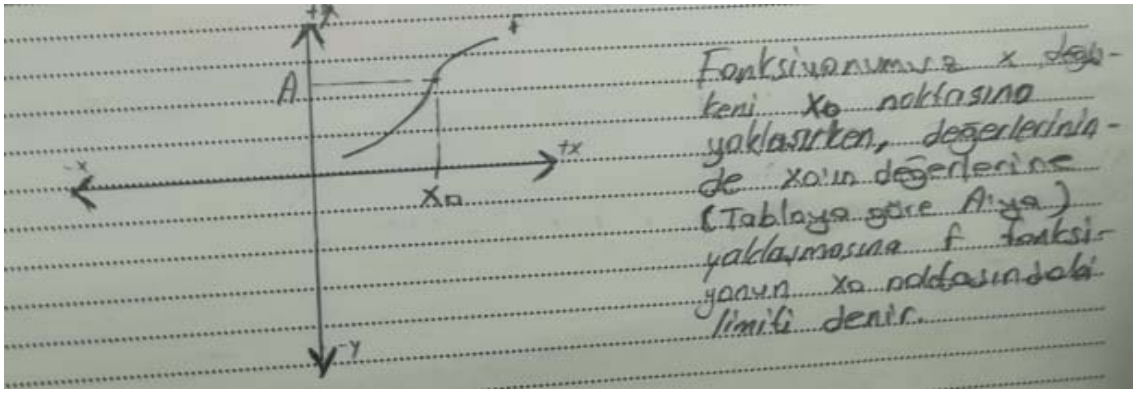
	Frekans	Yüzde (%)
Niceleyicileri Kullanmayanlar	8	27

Öğretmen adaylarının, %27'si niceleyicileri kullanmamayı tercih etmemiştir. İnformal tanımı kullanarak limit kavramını tanımlamışlardır.



Şekil 0.1. *1.soruya verilen cevaplardan biri*

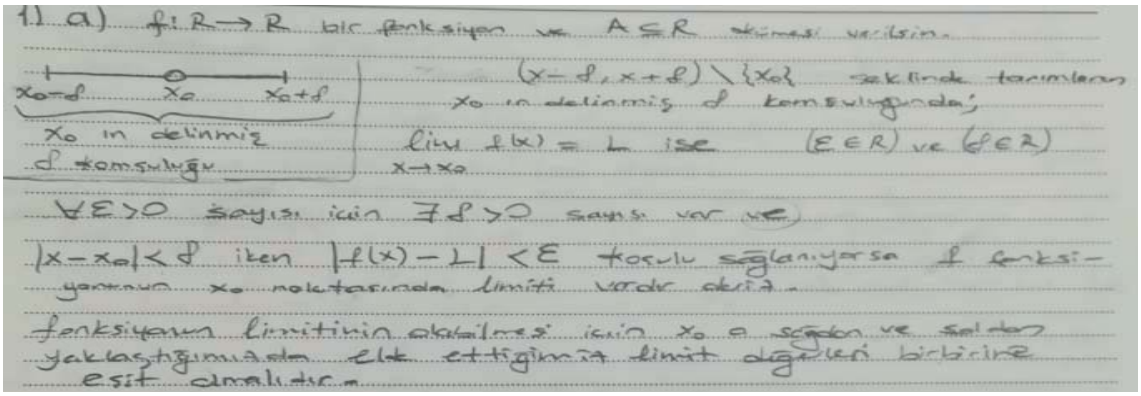
Şekil 4.1'de verilen cevapta öğretmen adayı limit tanımını kendi cümleleri ile yapmaya çalışarak informal tanım yapmayı tercih ettmiştir. Ancak aday notasyonları eksik ve yanlış kullanmıştır.



Şekil 0.2. *Öğretmen adayının limit tanımlarına yönelik soruya ilişkin cevaplarına örnek*

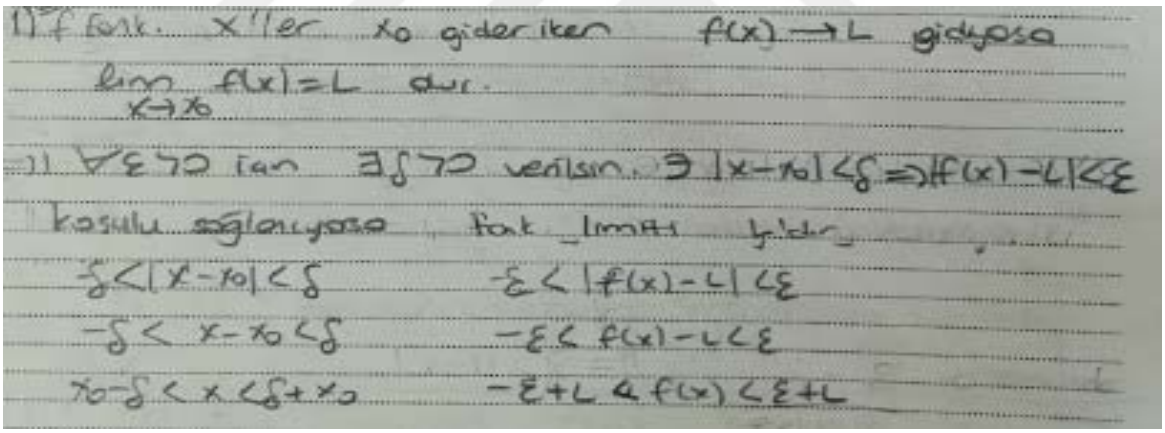
Şekil 4.2.'de öğretmen adayı fonksiyonun limitini informal olarak tanımlamıştır. Analitik düzlemde fonksiyonun limitini yorumlarken komşuluk kavramına değinmemiştir. Öğretmen adayının limit kavramına yönelik kavramsal bilgisinin eksik

olduğu görülmektedir. Adayın fonksiyonun bir noktadaki limitini fonksiyonun o noktada aldığı değer ile eşdeğer olduğunu düşündüğü çizdiği grafikten anlaşılmaktadır.



Şekil 0.3. *Limitin delinmiş komşuluk kavramı ile ifade edilmesi*

"$f,\ x_0$'ın delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun." ifadesini kullanan adayların oranı %17 şeklindedir. Şekil 4.3'te komşuluk kavramı öğrenciler tarafından anlaşılmadığından limit kavramı soyut ve zor bir kavram olarak görülmektedir.



Şekil 0.4. *Öğretmen adayının limit tanımına verdiği yanıt*

Öğretmen adayının Şekil 4.4'te limit kavramını komşuluk kavramı ile ifade etmeye çalıştığı görülmektedir.

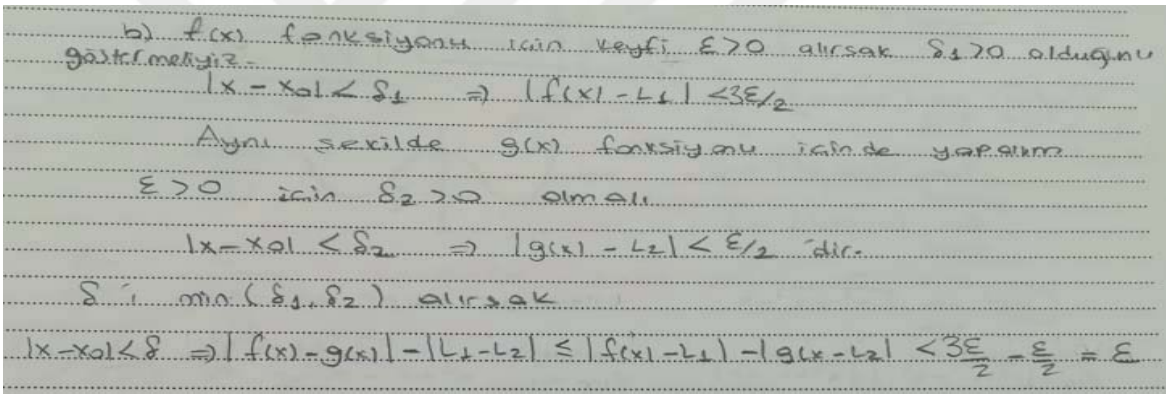
Birinci sorunun b şıkkının amacı $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ olsun. $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = L_1 - L_2$ olduğunu kanıtlamaları, cevaplarına yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesidir.

1/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.5'de yer almaktadır.

Tablo 0.5. *1/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

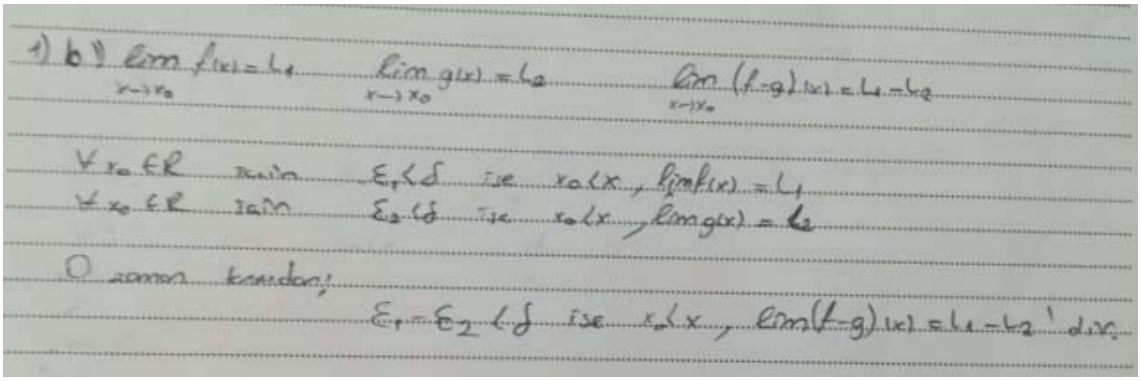
	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	7	23
Yarım yapanlar	22	74
Yanlış yapanlar	1	3
Genel Toplam	30	%100

Adaylar 1. sorunun b şıkkında yer alan sorunun %23'ünü tam doğru ve %3'ü yanlış olarak cevaplamışlardır. Kavramsal bilginin incelendiği bu soruda adayların %74'ü yarım yapanlar kategorisinde yer almıştır. Bu durum göstermektedir ki adayların ezbere bilgiyi kullanmaya daha yatkın oldukları görülmüştür.



Şekil 0.5. *1/b sorusuna verilen cevaplardan biri*

Şekil 4.5'te kavramsal bilgiyi ölçen 1/b sorusunun cevapları incelendiğinde öğrencilerin niceleyicileri yanlış ve eksik kullandıkları görülmektedir. $\forall \varepsilon > 0$ ifadesinin kullanılması gerekirken "keyfi $\varepsilon > 0$" ifadesi tercih edilmiştir. Buradan öğretmen adayının formal tanımın ve niceleyicilerin anlamlarını tam olarak bilmediği anlaşılmaktadır.



Şekil 0.6. *1/b sorusuna verilen yanıtlardan biri*

Şekil4.6'da $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ için $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = L_1 - L_2$ sonucunun gösterilmesi istenen bu soruda alt problem alanlarına göre kategorilere ayrılmıştır. Bu kategoriler L_1 için $\forall \varepsilon' a$ karşılık δ_1 seçenler, L_2 için $\forall \varepsilon' a$ karşılık δ_2 seçenler ve $L_1 - L_2 \to \min(\delta_1, \delta_2)$ seçenler şeklinde temalar oluşturulmuştur.

Limit tanımında alt problem alanına verilen cevapların yüzde ve frekans dağılımı Tablo 4.6'da yer almaktadır.

Tablo 0.6. *Limit tanımında alt problem alanına verilen cevapların yüzde ve frekans dağılımı*

	Frekans	**Yüzde (%)**
$\boldsymbol{L_1 \to \delta_1}$ **seçenler**	24	80
$\boldsymbol{L_2 \to \delta_2}$ **seçenler**	24	80
$\boldsymbol{L_1 - L_2 \to \min(\delta_1, \delta_2)}$**seçenler**	22	73

L_1 için $\forall \varepsilon' a$ karşılık δ_1 seçenler %80, L_2 için $\forall \varepsilon' a$ karşılık δ_2 seçenler %80 ve $L_1 - L_2 \to \min(\delta_1, \delta_2)$ seçenlerin %73 olduğu görülmüştür. δ_1 ve δ_2 seçen iki kişinin $\min(\delta_1, \delta_2)$ seçmediği görülmüştür. δ_1, δ_2 seçen adayların bazısı niceleyicileri eksik olarak ifade etmiştir.

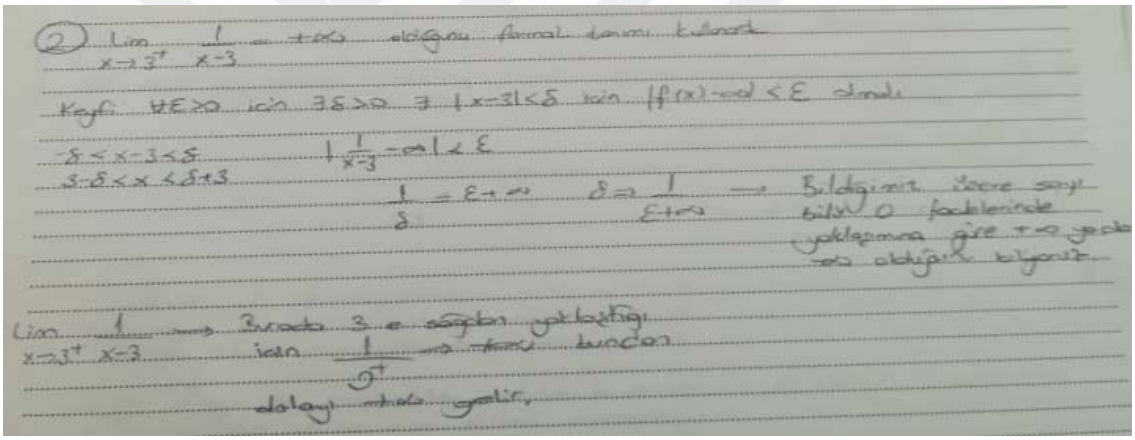
İkinci sorunun amacı sağdan limitin $+\infty$ olduğunun formal tanımı kullanarak gösterilmesidir. Öğretmen adayının bu soruya yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesidir.2. soruya ait frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.7'de yer almaktadır.

Tablo 0.7. *2.sorunun frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	6	20

Yarım yapanlar	8	27
Yanlış yapanlar	16	53
Genel Toplam	30	%100

Öğretmen adaylarının %53'ü hem kavramsal hem de işlemsel bilgiyi içeren 2. soruya yanlış cevap vermiştir. 30 öğrenciden 6 öğrenci bu soruyu tam doğru olarak cevaplamıştır. Bu oranın oldukça düşük olduğu görülmektedir. Adayların limit alırken formal tanımın uygulanması aşamasında güçlük yaşadıkları görülmektedir. Adayların birçoğunun sağ komşuluğu yanlış ve hatalı olarak ifade ettikleri ortaya çıkmaktadır. Genişletilmiş gerçel sayılar kümesi üzerinde gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonlarda limitin sonsuz olması kavramını açıklamada öğretmen adaylarının yetersiz oldukları görülmüştür.



Şekil 0.7. *Öğretmen adayının ikinci soruya yanıtı*

Şekil 4.7'de adayların sorunun çözümünde sıklıkla formal tanımı kullandıkları görülmüştür. Şekilde verilen cevapta niceleyicilerin bir kısmı yanlış kullanılmıştır. Aday, keyfi ve $\forall \varepsilon > 0$ ifadelerini birlikte kullanmıştır.

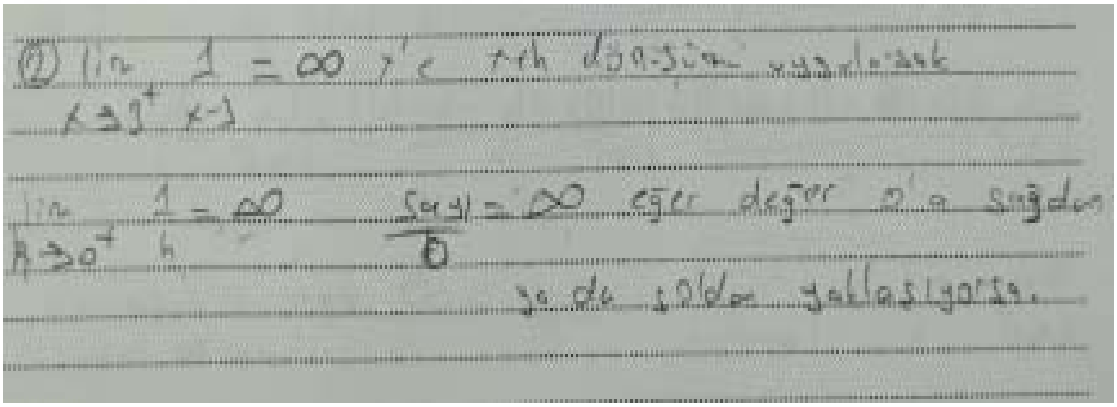
Soruya verilen yanıtları derinlemesine araştırmak için alt kategorilere ayrılıp incelenmiştir. Bu kategoriler "Sağ komşuluğu doğru tanımlayan, sağ komşuluğu yanlış tanımlayan ve $\forall M > 0$ ifadesini kullanan " biçiminde olmak üzere Tablo 4.8'de ele alınmıştır.

Tablo 0.8. *Sağ komşuluğun incelenmesi*

	Frekans	**Yüzde (%)**

Sağ komşuluğu doğru tanımlayan	2	7
Sağ komşuluğu yanlış tanımlayan	22	73
$\forall M > 0$ ifadesini kullanan	12	40

Öğretmen adaylarının %7'si sağ komşuluğu doğru tanımlamış, %73'ü tanımlamaya çalışmış ancak yanlış tanımlamıştır. Adayların %40'ı $\forall M > 0$ ifadesini kullanmıştır. Adayların yanıtları incelendiğinde formal tanımı uygularken kavramların ve işlemlerin anlamlarını tam olarak bilmeden cevaplamaları dikkat çekmektedir.



Şekil 0.8. *2.soruya verilen cevaplardan biri*

Şekil 4.8.'de öğretmen adayının formal tanım yerine işlem bilgisine yer verdiği görülmektedir. Aday, $\frac{sayı}{0} = \infty$ ifadesini kullanması dikkat çekmektedir. Bu aday yanlış yapanlar içerisinde yer almaktadır.

Üçüncü sorunun amacı formal tanım kullanılarak $x \to +\infty$ iken $f(x) = \frac{1}{x^2} \to 0$ olduğunun gösterilmesi ve cevaplara yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesidir.3. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.9'da yer almaktadır.

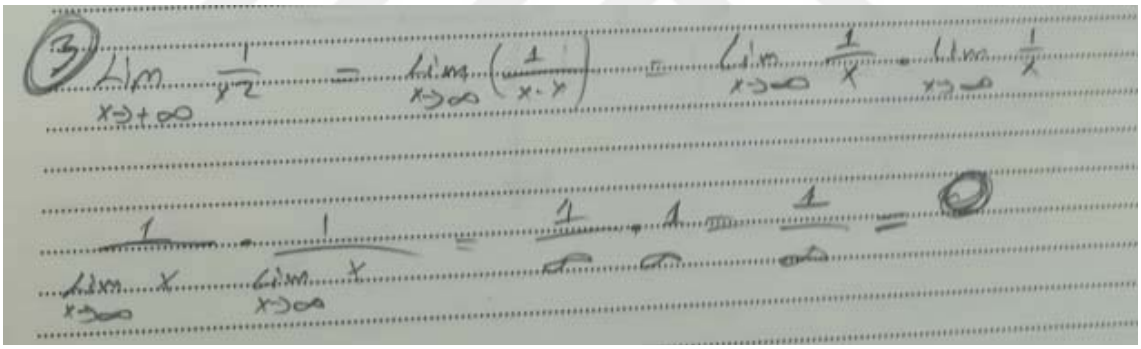
Tablo 0.9. *3. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	1	3
Yarım yapanlar	14	47
Yanlış yapanlar	15	50
Genel Toplam	30	%100

Bu soruya öğretmen adaylarının %50'si yanlış cevap vermiştir. 30 kişiden bir kişi (%3) tam yapanlar kategorisinde yer almıştır. Araştırmaya katılanların %47'si yarım yapanlar kategorisinde yer almıştır. Kavramsal ve işlemsel bilgiyi ölçen bu soruda adayların yanıtlarını yüzeysel olarak verdikleri görülmüştür. Adayların,

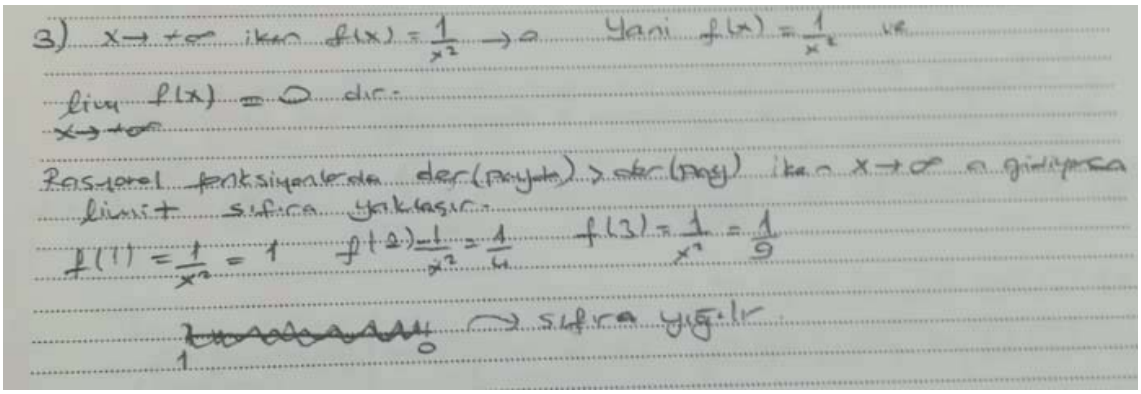
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; için \; \exists M > 0 \;\; öyle \; ki \; \forall x > M \; için \; |f(x) - L| < \varepsilon$

tanımını eksik ve yanlış uyguladıkları görülmüştür.



Şekil 0.9. *Öğretmen adayının 3.soruya yanıtı*

Şekil 4.9'da öğretmen adayının işlemsel bilgiyi kullanarak çözüme ulaşmayı tercih ettiği görülmüştür. Aday ∞ kavramını reel sayı olarak düşünmüştür ve yerine koyma metodunu kullanmıştır. Bu aday yanlış yapanlar grubunda yer almaktadır.



Şekil 0.10. *3.soruya verilen cevaplardan biri*

Şekil 4.10'da öğretmen adayı $f(x) = \frac{1}{x^2} \to 0$ olduğunu göstermek için $x \to +\infty$ iken rasyonel fonksiyonlarda limit alınırken kullandıkları ezbere bilgiden faydalanarak çözdüğü görülmüştür. Adayın aynı zamanda yığılma kavramından bahsettiği dikkat çekmektedir. Adayın yanıtı incelendiğinde aşağıda verilen genellemelerden faydalandığı görülmektedir.

$$m, n \epsilon N \text{ olmak üzere;}$$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \\ \infty \text{ veya } -\infty, & n > m \end{cases}$$

Dördüncü sorunun a şıkkının amacı tam değer fonsiyonunun *x=0* noktasındaki limitinin incelenmesidir. Bu soru ağırlıklı olarak işlemsel bilgiyi ölçmeye yöneliktir.

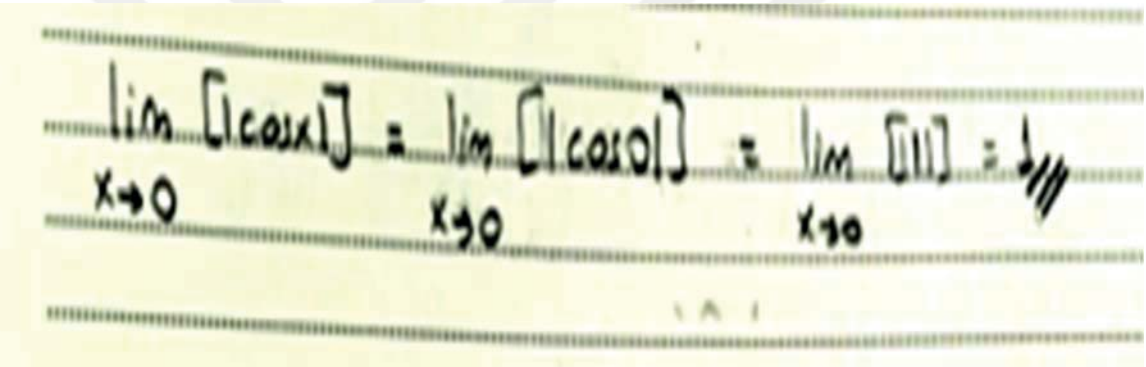
$$\lim_{x \to 0} [\![cos x]\!]$$

4/a sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.10'da yer almaktadır.

Tablo 0.10. *4/a.sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

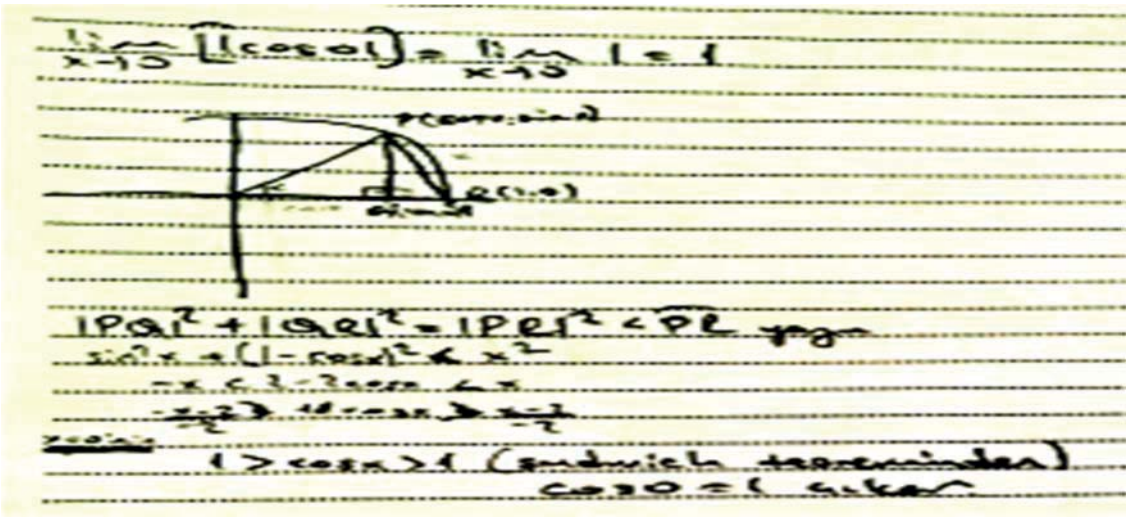
	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	10	33
Yarım yapanlar	4	13
Yanlış yapanlar	16	54
Genel Toplam	30	%100

İşlemsel ve kavramsal bilginin ölçüldüğü 4/a sorusunda öğretmen adaylarının %33'ünün başarı gösterdiği %54'ünün ise başarısız olduğu görülmüştür. %13'ü ise yarım yapanlar kategorisinde yer almıştır.



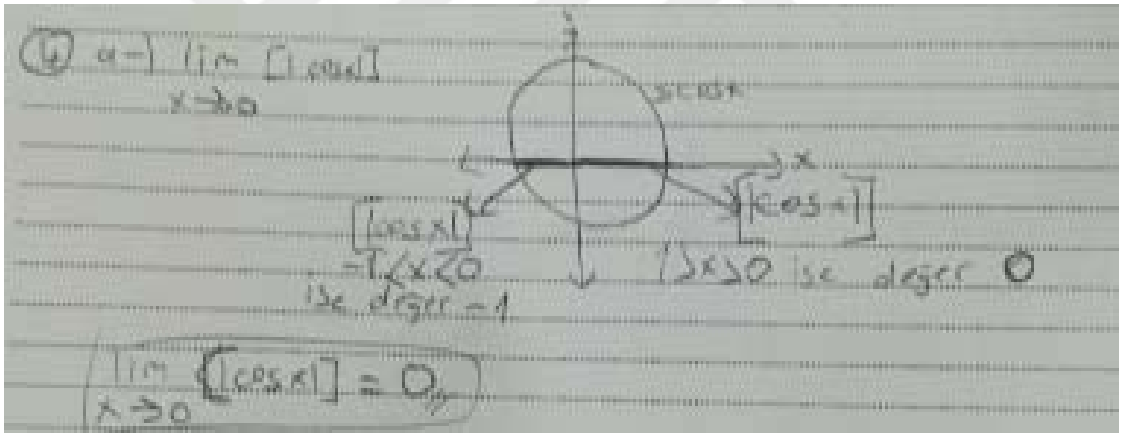
Şekil 0.11. *Öğretmen adayının 4/a sorusuna yönelik yanıtı*

Şekil 4.11'de öğretmen adayı verilen noktayı yerine yazarak sonucu elde etmeye çalışmıştır. Verilen cevap incelendiğinde adayların anlamlandıramadan kullandıkları yöntemlerin limitle ilgili soruları işlem şeklinde değerlendirmelerine yol açmaktadır. Tam değer fonksiyonlarının limitini alırken zorluk yaşadıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının %54 oranında yanlış yapanlar kısmında yer almasının nedeni tam değer fonksiyonu ile ilgili bilgilerinin eksik olmasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 0.12. *4/a sorusuna verilen cevaplardan biri*

Şekil 4.12'de adayın şekilde birim çemberden ve Sandwich Teoremi'nden faydalandığı görülmektedir.



Şekil 0.13. *4/a sorusuna öğretmen adayının yanıtı*

Şekil 4.13'te öğretmen adayının fonksiyonun grafiğini çizerek $x = 0$ noktasında limiti incelediği görülmektedir.

Dördüncü sorunun b şıkkında öğretmen adaylarından $x \to \infty$ için fonsiyonun limitini incelemeleri istenmektedir.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

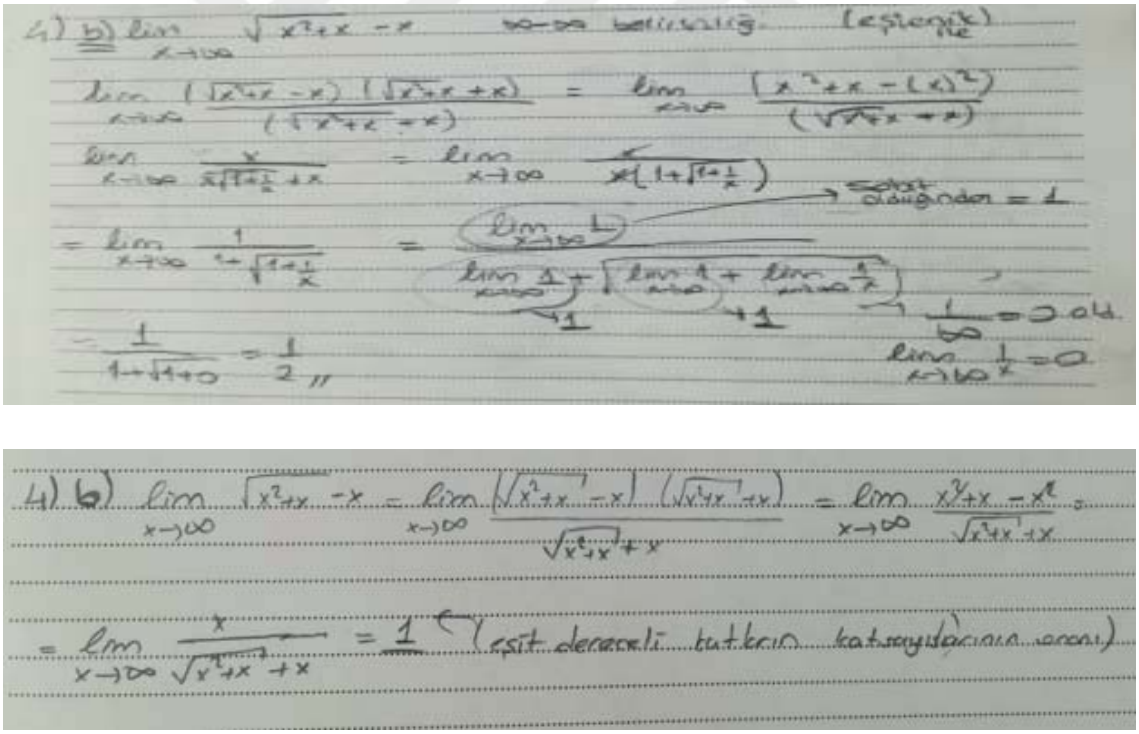
Öğretmen adaylarına yöneltilen 4/b sorusunun amacı $\infty - \infty$ belirsizliği durumunda öğretmen adaylarının verdiği cevapları incelemektir. İşlemsel bilgiye

yönelik bu soruda adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.11'de yer almaktadır.

Tablo 0.11. *4/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	20	67
Yarım yapanlar	6	20
Yanlış yapanlar	4	13
Genel Toplam	30	%100

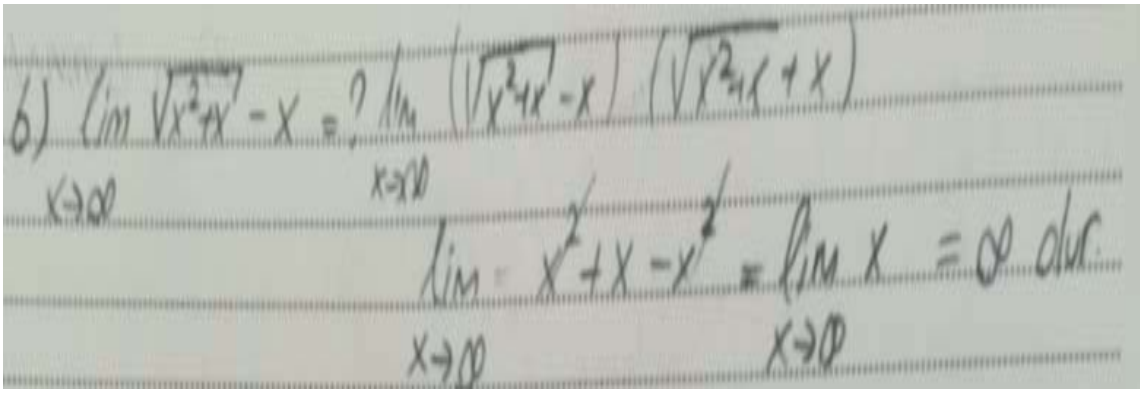
Öğretmen adaylarının %67' si tam doğru olarak cevaplarken,%13'ü yanlış olarak cevaplamıştır. %20' si ise yarım yapanlar kategorisinde yer almıştır. Çoğunlukla işlemsel bilgi kullanılarak çözüm gerçekleştirilmiştir. Belirsizlik durumunda limitin nasıl araştırıldığının belirlenmesi amaçlanmıştır.



Şekil 0.14. *4/b sorusuna verilen cevaplardan birkaç örnek*

Şekil 4.14'te öğretmen adaylarının çoğunluğu 4/b sorusunun cevapları incelendiğinde sonuca eşleniği ile çarpıp bölerek ulaştığını ifade etmişlerdir. Belirsizlik veya tanımsızlık durumlarında öğrencilerin çoğu fonksiyonların limitini hesaplarken cebirsel gösterimi tercih etmiştir. Bu durum kavramsal yapının oluşmasında engel teşkil

etmektedir. Soruda $\infty - \infty$ belirsizliğinin ortadan kaldırılması için öğrenciler cebirsel olarak çarpanlara ayırma yoluna gittikleri görülmüştür.



Şekil 0.15. *4/b sorusuna verilen yanıtlardan biri*

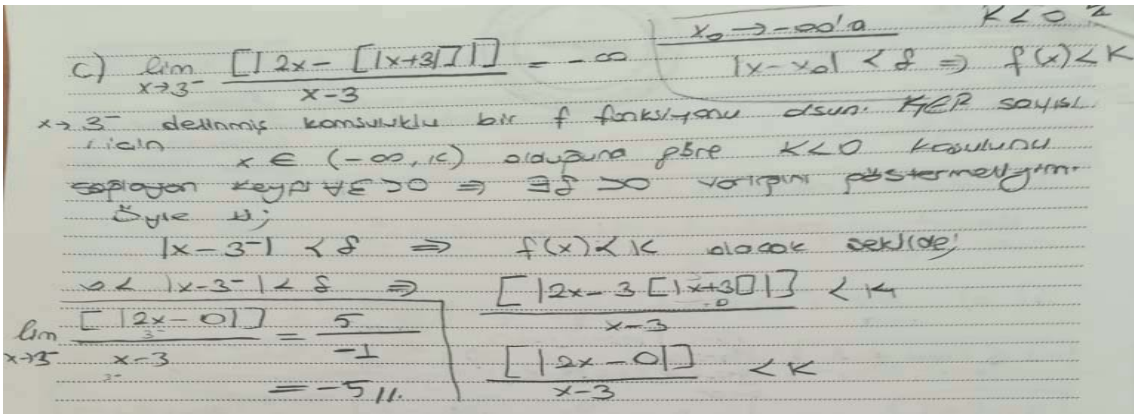
Şekil 4.15'te adayın eşlenik ile ilgili bilgilerinin yetersiz olduğu görülmektedir. Bu aday yanlış yapanlar kısmında yer almaktadır.

Dördüncü sorunun amacı tam değer fonksiyonunun istenen noktadaki soldan limitini incelemektir. Tam değer fonksiyonunu içeren fonsiyonun $x \to 3^-$ için limitine adayların verdikleri cevaplar incelenmiştir. İşlemsel bilgiye yönelik bu soruda adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.12'de yer almaktadır.

Tablo 0.12. *4/c sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

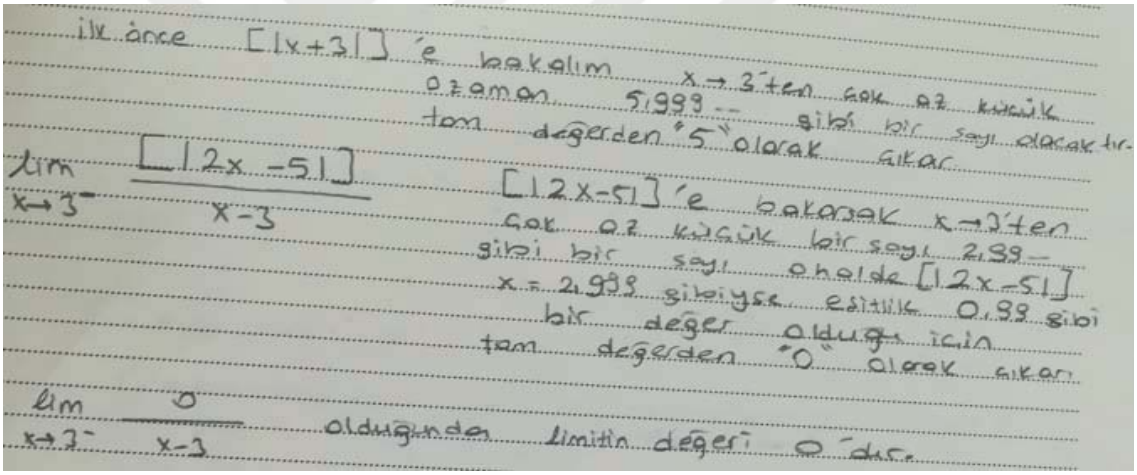
	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	1	3
Yarım yapanlar	17	57
Yanlış yapanlar	12	40
Genel Toplam	30	%100

Öğretmen adaylarının %3' ü tam doğru olarak cevaplarken,%40'ü yanlış olarak cevaplamıştır. %57' si ise yarım yapanlar kategorisinde yer almıştır. Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonu konusunda eksiklikleri bulunmaktadır.



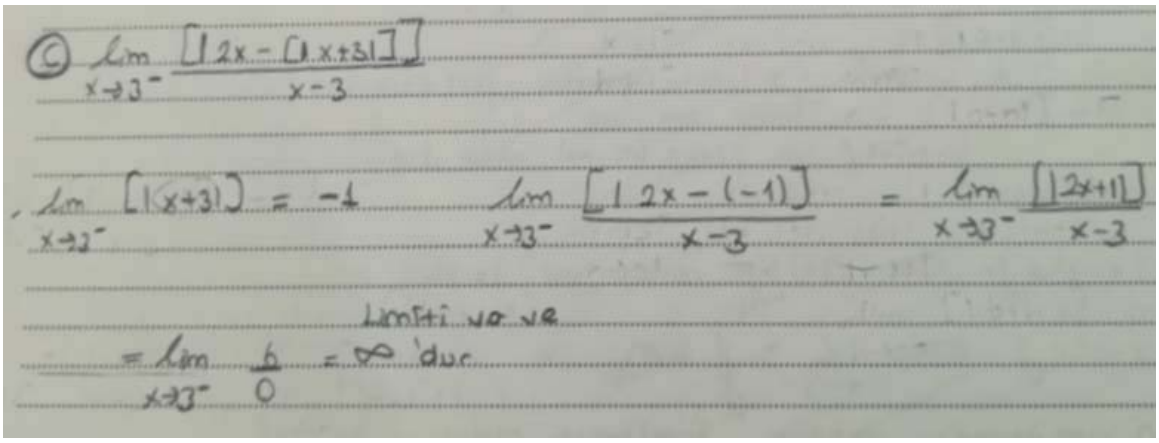
Şekil 0.16. *4/c sorusuna verilen cevaplardan biri*

Şekil 4.16'da öğretmen adayı verilen fonksiyonun limitini bulurken formal tanımı kullanmaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır. Aday yanıta yönelik formal tanımı uygulamaya çalışmıştır. Aday anlamsız işlemler, yanlış niceleyiciler kullanmıştır.



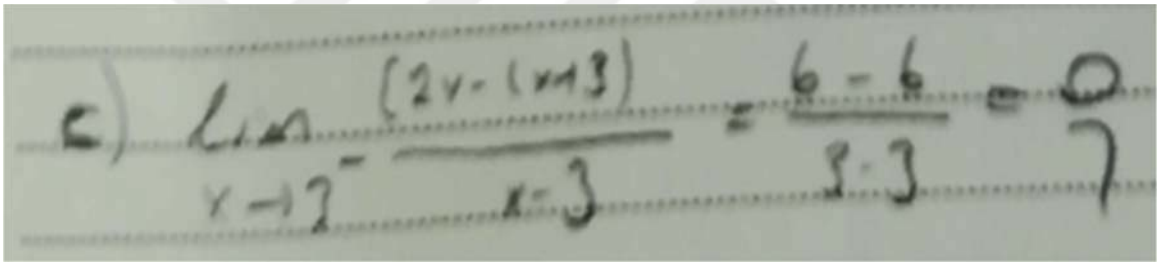
Şekil 0.17. *Öğretmen adayının 4/c sorusuna yanıtı*

Şekil 4.17'de katılımcı verilen tam değer fonksiyonunun limitini incelerken *x* yerine tam değer fonksiyonun özelliklerini kullanarak sayı vermiştir. Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonu konusunda eksiklikleri bulunmakta ve bu konu ile ilgili kavramsal bilgileri eksik bulunmaktadır.



Şekil 0.18. *Öğretmen adayının sonsuz kavramını reel sayı olarak ele alması*

Şekil 4.18'de öğretmen adayının yanıtı incelendiğinde, adayın ∞ kavramını reel sayı olarak değerlendirdiği ve limitin var olduğu şeklinde çıkarımda bulunduğu görülmektedir.



Şekil 0.19. *Öğretmen adayının yanıtı*

Şekil 4.19'da öğretmen adayının yanıtı incelendiğinde tam değer fonksiyonunda noktaları yerine yazdığı ve sonucu 0 bulduğu görülmektedir. Öğretmen adayının işlemleri incelendiğinde hatalı işlemler yaptığı ve $\frac{0}{0}$ belirsizliğini 0 reel sayısına eşit olarak bulduğu gözlemlenmiştir.

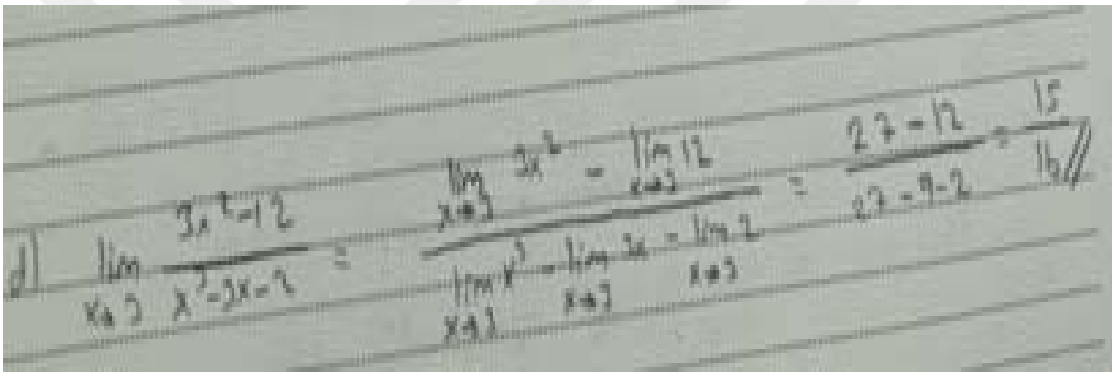
Dördüncü sorunun d şıkkının amacı adaylardan verilen foksiyonun istenen noktadaki limiti araştırmasıdır. Bu sorunun içeriği adayların işlemsel bilgilerinin incelenmesine yöneliktir. Fonksiyonun $x \to 3$ için limitine dair öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar değerlendirilmiştir.

İşlemsel bilgiyi ölçmeye yönelik bu soruda adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.13'te yer almaktadır.

Tablo 0.13. *4/d sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	24	80
Yarım yapanlar	3	10
Yanlış yapanlar	3	10
Genel Toplam	30	%100

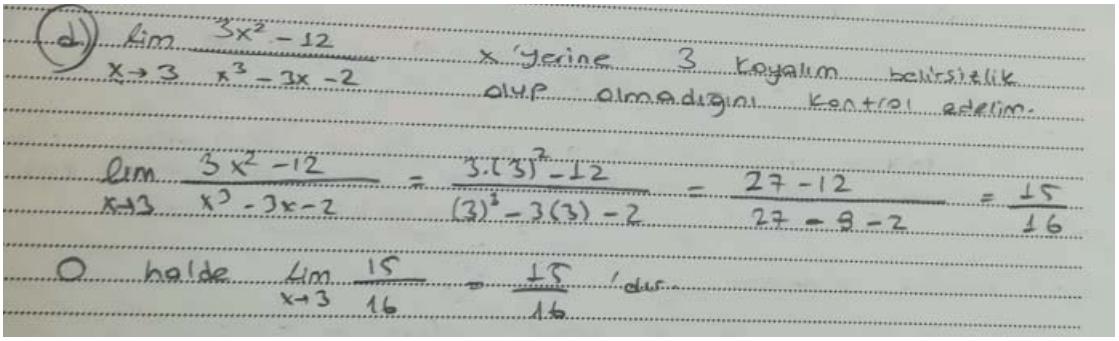
Öğretmen adayları, işlemsel bilgiyi ölçmeye yönelik olan soruda %80 oranında doğru cevap vermiştir. Bu soru en yüksek oranda tam doğru kategorisinde cevaplanan işlemsel bir sorudur. Bu soruyu 3 kişi yanlış, 3 kişi de yarım yapanlar olarak cevaplamıştır.



Şekil 0.20. *4/d sorusuna öğretmen adayının verdiği yanıt*

Şekil 4.20'de adayın limitin özelliklerinden biri olan

$\lim_{x\to x_0}(f(x) \mp g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \mp \lim_{x\to x_0} g(x)$ ifadesini kullanmayı tercih etmiştir.



Şekil 0.21. *Öğretmen adayının 4/d sorusuna yanıtı*

Şekil 4.21'de öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu *x* yerine 3 yazarak cevaba ulaşma seçeneğini tercih etmişlerdir. Bir fonksiyonun limiti alınırken öğrenciler literatürdeki sonuçlara benzer olarak fonksiyonun limiti alınan noktadaki değerini dikkate almaktadır. Öğretmen adaylarının tam değer fonksiyonların bir noktadaki limitini alırken rasyonel fonksiyonlara oranla daha başarısız oldukları görülmektedir.

Beşinci sorunun amacı öğretmen adayının verilen parçalı tanımlı fonksiyonda istenen noktadaki sürekliliği incelemesine yöneliktir.

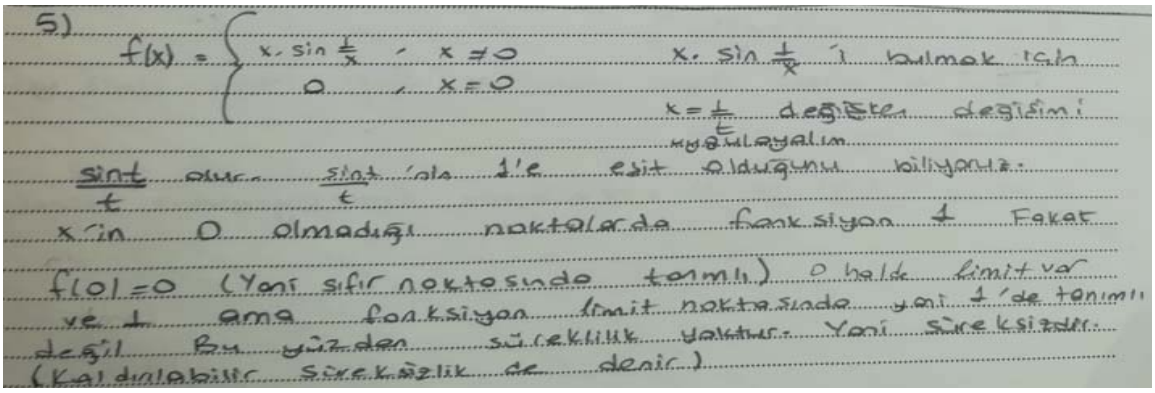
$f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun *x=0* noktasında sürekli olup olmadığını belirleyiniz.

Parçalı tanımlı fonksiyonun *x=0* noktasında sürekliliğinin incelendiği bu soruda adayların verdiği cevapların frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.14'da yer almaktadır.

Tablo 0.14. *5. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	5	17
Yarım yapanlar	5	17
Yanlış yapanlar	20	66
Genel Toplam	30	% 100

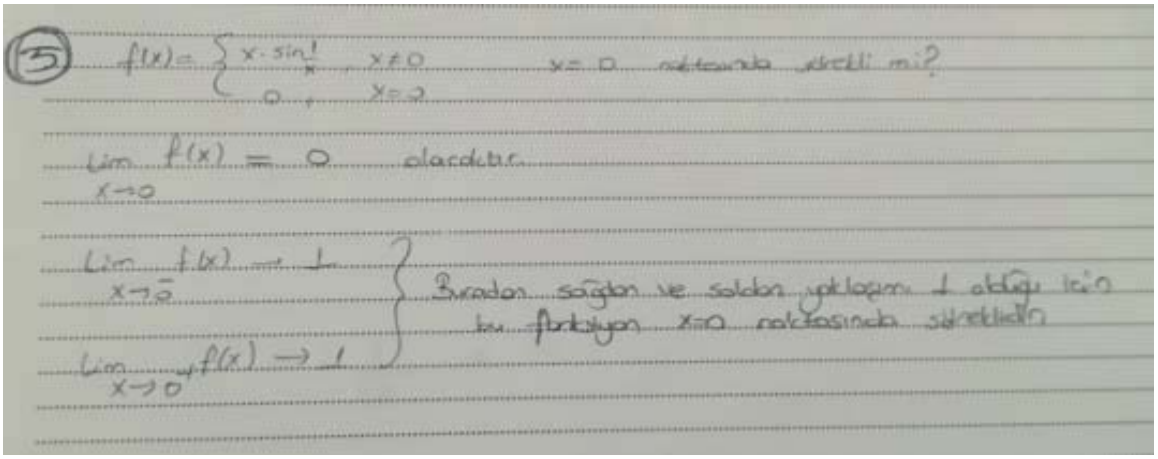
Öğretmen adaylarının %66'sı parçalı tanımlı fonksiyonunun sürekliliğini yanlış olarak yanıtlamıştır. Bu yüksek bir orandır. 30 kişiden 5 kişi tam yapanlar kategorisinde yer almıştır. Bu durumun nedeninin öğretmen adaylarının parçalı tanımlı fonksiyonlardaki bilgilerinin yetersiz olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.



Şekil 0.22. *5.soruya verilen yanıtlardan biri*

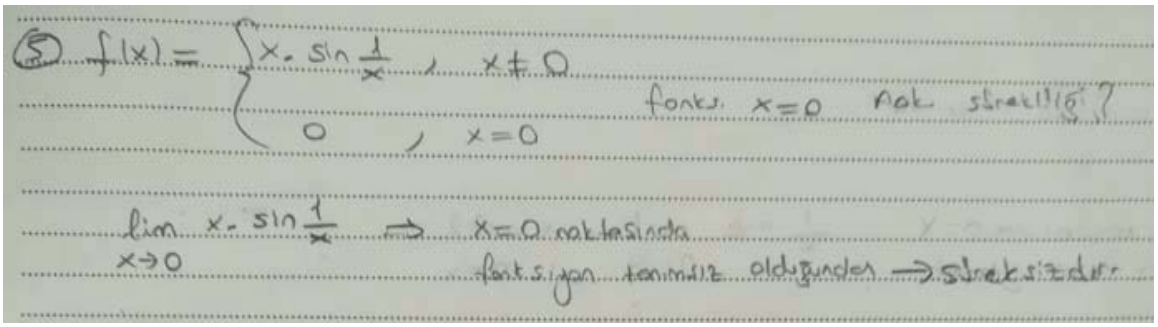
Şekil 4.22'de öğretmen adaylarının bir kısmı soruda verilen fonksiyonun limitini bulurken değişken değişimi yönteminden faydalanmıştır ancak dönüşümleri eksik ifade edip limiti yanlış bulmuştur. 5. soruya verilen cevaplar incelendiğinde öğretmen adaylarının trigonometrik fonksiyonların limitini alırken sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. Özellikle

$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ ve $x=\frac{1}{t}$ değişken dönüşümü yaparken $\lim_{t\to\infty}\frac{sint}{t}$ ile $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ ifadelerinin sonuçlarını 1 bulmuşlardır. Buradan öğretmen adaylarının kavramsal bilgiyi tam olarak oluşturamadıkları ve sorulara ezbere yanıtlar verdikleri gözlemlenmiştir.



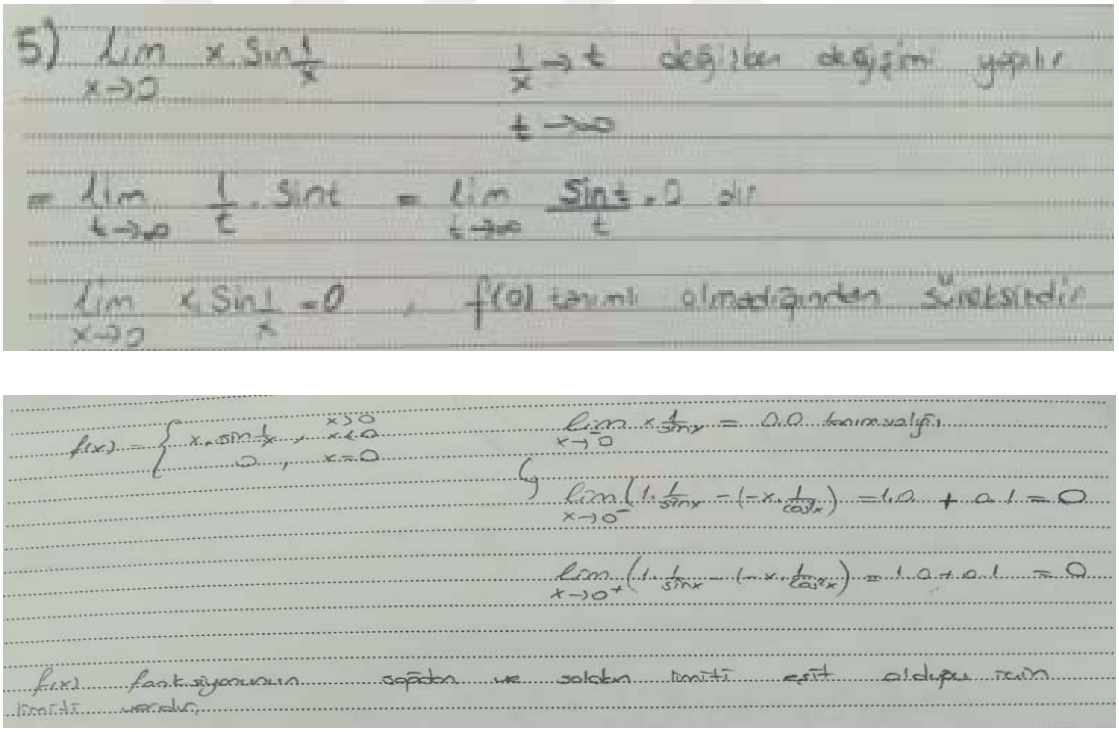
Şekil 0.23. *Öğretmen adayının yanıtı*

Şekil 4.23'teki cevap incelendiğinde öğretmen adayının sağdan ve soldan limitlerin eşit olup olmamasına göre süreklilik hakkında çıkarım yaptığı görülmüştür. Öğretmen adayının süreklilik tanımına yönelik kavramsal bilgisi eksiktir. Adayının limit ve süreklilik kavramlarına yönelik de yanlış anlamalar geliştirdiği görülmektedir.



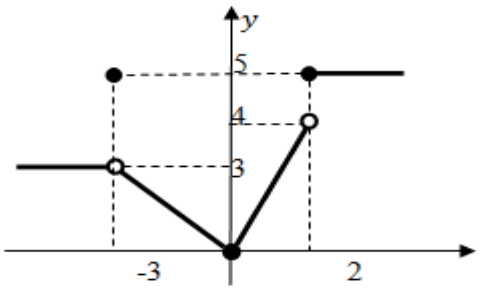
Şekil 0.24. *5.soruya verilen yanıtlardan biri*

Şekil 4.24'te öğretmen adayı fonksiyon 0 noktasında tanımlı olduğu halde *x=0* noktasında tanımsız kabul ederek limitin varlığını incelemeden direkt süreksiz olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bunun sonucunda öğrencinin sürekliliği fonksiyonun sadece verilen noktadaki değeri olarak algıladığı sonucu gözlemlenmiştir. Öğretmen adayının hatalı ve anlamsız ifadeler kullandığı da görülmektedir.



Şekil 0.25. *5.soruya verilen yanıtlardan birkaçı*

Şekil 4.25'te öğretmen adaylarının parçalı tanımlı fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik yanlış anlamaları söz konusudur.



Şekil 0.26. *f(x) fonksiyonunun grafiği*

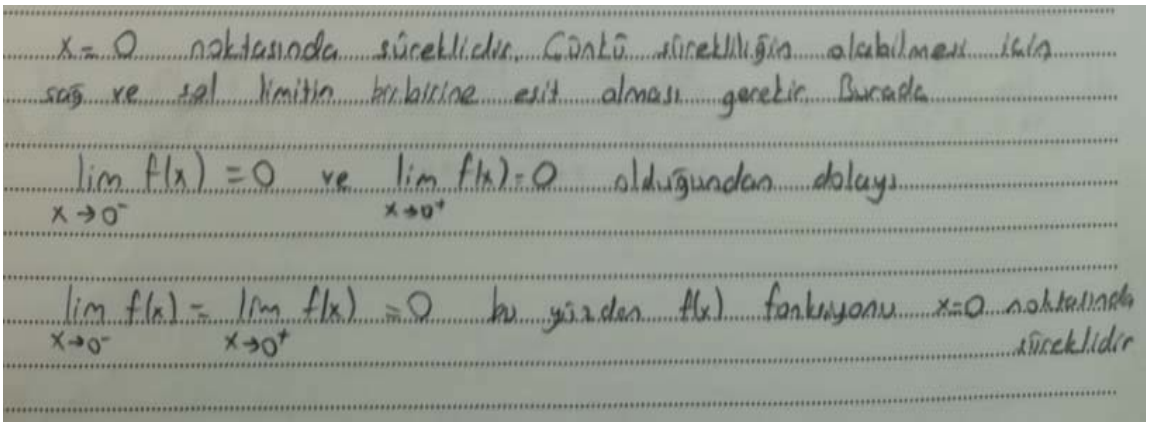
Yukarıda verilen *f(x)* fonksiyonu hangi noktalarda sürekli değildir? Açıklayınız.

Tek değişkenli fonksiyonlarda grafiği verilen fonksiyonun süreksizlik noktalarının incelendiği soruya ait öğretmen adaylarının cevaplarının yüzde ve frekans dağılımları aşağıdaki Tablo 4.15'de verilmiştir.

Tablo 0.15. *6. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	25	83
Yarım yapanlar	5	17
Yanlış yapanlar	0	0
Genel Toplam	30	%100

Öğretmen adaylarının grafik verildiğinde sürekliliği yorumlamaları istenen soruda %83 oranında başarı gösterdikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının birçoğu tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramını grafik üzerinden doğru yorumlamıştır. Grafik üzerinde yer alan noktalarda sağdan ve soldan limitlerini bulma, tanımlı olup olmadığına karar verme açısından adayların başarılı oldukları görülmüştür. Bulgular göstermektedir ki adayların, limit ve süreklilik konularında fonksiyonun cebirsel hali yerine grafiği üzerinden yorum yaptıklarında daha başarılı oldukları gözlemlenmiştir.



Şekil 0.27. *6.soruya verilen yanıtlardan biri*

Şekil 4.27'deki örneğe göre öğretmen adayının süreklilik kavramını eksik tanımladığı görülmektedir. Süreklilik kavramında sağdan ve soldan limitlerin birbirine eşit olmasının yanı sıra fonksiyonun o noktadaki değerinin elde edilen limit değerlerine eşit olduğunun gözardı edildiği görülmektedir.

4.2. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik Konusuna Yönelik Bulgular

İki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularına ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgileri incelemeye yönelik açık uçlu sorular aşağıda yer almaktadır.

İki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının tanım ve yorumunun istendiği birinci sorunun a şıkkı öğretmen adaylarının konuya yönelik kavramsal bilgilerini ölçmeyi amaçlamaktadır. Adayların verdikleri cevaplara ait frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.16'da verilmiştir.

Tablo 0.16. *İki değişkenli fonksiyonlarda limit ve sürekliliğe dair açık uçlu 1. sorunun cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	19	63
Yarım yapanlar	4	13
Yanlış yapanlar	7	24
Genel Toplam	30	%100

İki değişkenli fonksiyonlarda limit tanımına öğretmen adaylarının %63'ü tam, % 13'ü yarım, %24 'ü ise yanlış olarak cevap vermiştir. Adayların yanıtlarını detaylı incelemek için limit; formal tanım, informal tanım ve komşuluk kavramı şeklinde ele

alınarak üç temada incelenmiştir. Limit tanımına yönelik cevapların yüzde ve frekans dağılımları Tablo 4.17'de yer almaktadır.

Tablo 0.17. *İki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramına yönelik cevapların sınıflandırılması*

İki değişkenli fonksiyonda limit	**Tam yapanlar**		**Yarım yapanlar**		**Yanlış yapanlar**	
	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde
Formal Tanım	14	58	6	25	4	17
İnformal Tanım	4	67	0	0	2	33
Komşuluk Kavramı ile	4	40	1	10	5	50

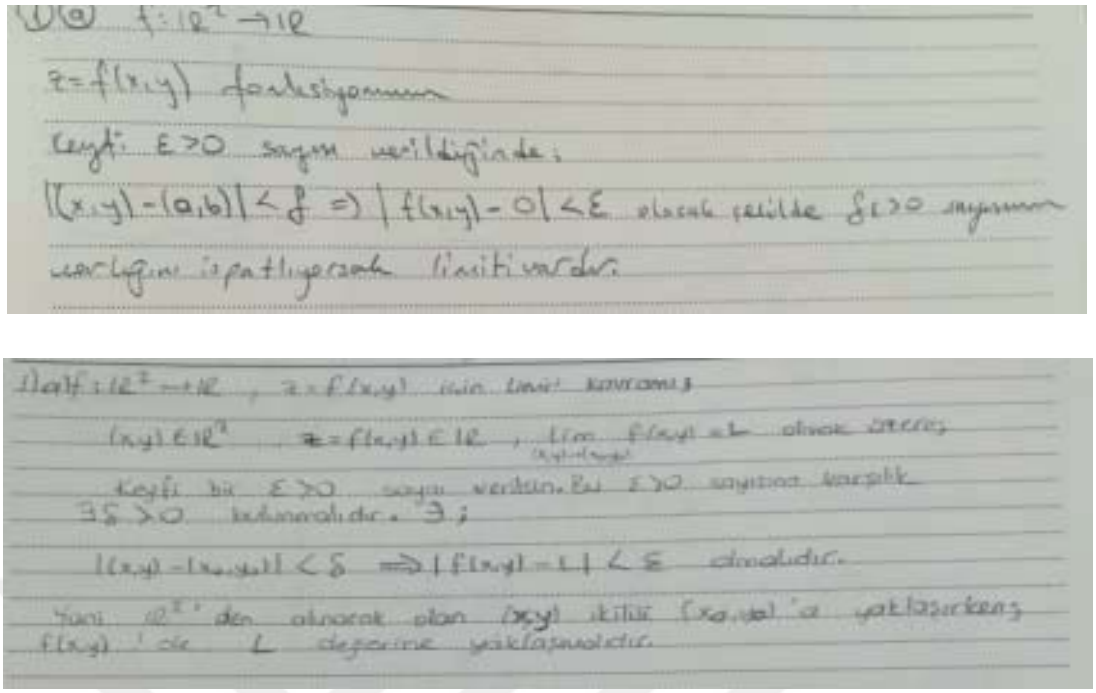
Öğretmen adayları iki değişkenli fonksiyonların limitini tanımlarken formal tanım, informal tanım ve komşuluk kavramlarını tercih etmişlerdir. Adaylar çoğunlukla formal tanım kullanmayı tercih etmiştir. Bu durum tek değişkenli fonksiyonlarda yapılan limit tanımı ile benzerlik göstermektedir. Adaylar tek değişkenli fonksiyonlarda da formal tanımı tercih etmişlerdir. İki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını formal yönden tercih eden öğrenci sayısı 24'tür.

İki değişkenli fonksiyonlarda limit tanımında niceleyici kullanımına yönelik frekans ve yüzde dağılımı Tablo 4.18'de yer almaktadır.

Tablo 0.18. *İki değişkenli fonksiyonların limit tanımında niceleyici kullanımı*

Limit tanımında niceleyici kullanımı		**Frekans**	**Yüzde (%)**
Niceleyici Kullananlar	**Tam yapanlar**	12	55
	Yarım yapanlar	6	27
	Yanlış yapanlar	4	18

İki değişkenli fonksiyonların limit tanımında niceleyici kullanan katılımcılar toplam katılımcıların %73'ünü oluşturmaktadır. Niceleyici kullanan adaylardan %55'i tam yapanlar, %27'si yarım yapanlar, %18'i ise yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır.



Şekil 0.28. *İki değişkenli fonksiyonlarda limit tanımına verilen cevaplardan birkaçı*

Şekil 4.28'deki örnekte öğretmen adayları iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını ifade etmeye çalışmıştır ancak tanımı ifade ederken " keyfi bir ε>0" ifadesini kullanmaları dikkat çekmektedir.

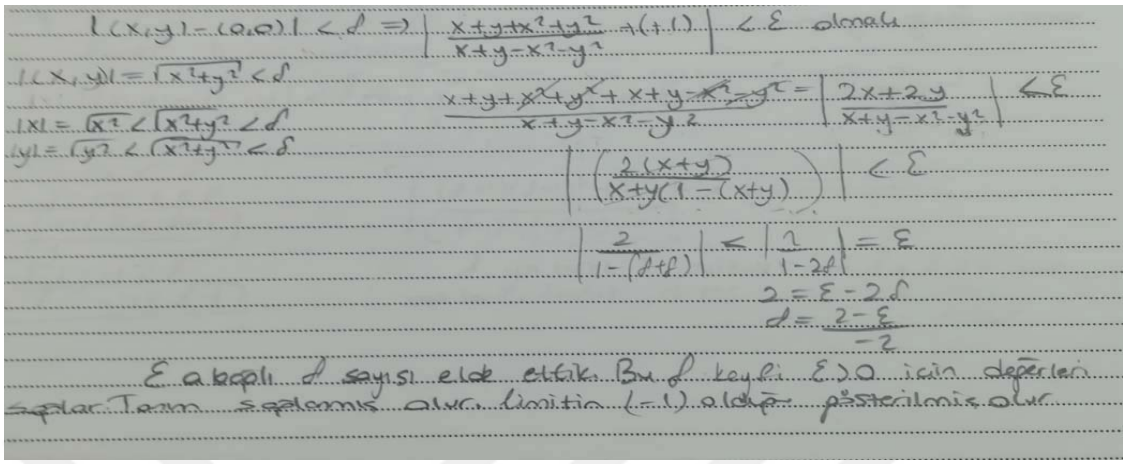
Birinci sorunun b şıkkı iki değişkenli fonksiyonun (0,0) noktasındaki limitinin -1 olduğunun gösterilmesine yöneliktir. Bu soru işlemsel bilgi ağırlıklıdır. $f(x,y)$ fonksiyonunun limitinin incelendiği soruda adayların verdiği cevaplara ait frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.19'da yer almaktadır.

Tablo 0.19. *1/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	12	40
Yarım yapanlar	14	47
Yanlış yapanlar	4	13
Genel Toplam	30	100

Öğretmen adayları verilen fonksiyonun (0,0) noktasındaki limitinin -1 olduğunu %40 oranla tam yapanlar kategorisinde cevaplamıştır. Adayların %47'si yarım yapanlar, % 13'ü ise yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır. İki değişkenli

fonksiyonlarda limit tanımına yönelik tam yapanlar %63 iken, limit ile uygulama sorusuna yönelik %40 tam yapanlar olduğu görülmektedir.



Şekil 0.29. *1/b sorusuna verilen yanıtlardan biri*

Şekilde 4.29'daki sorunun çözümünde öğretmen adayı formal tanımı kullanmıştır. Ancak aday niceleyicileri eksik ve yanlış bir şekilde kullanmıştır. Sorunun çözümünde δ sayısını negatif bulduğu görülmektedir. Adayın soruya verdiği cevap göz önüne alındığında niceleyici ve formal tanımın anlamını tam olarak kavrayamadığı anlaşılmaktadır.

İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramının yanıtlandığı kavramsal bilgiyi incelemeye yönelik olan bu soruda öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara ait frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.20'de yer almaktadır.

Tablo 0.20. *2/a sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	21	70
Yarım yapanlar	1	3
Yanlış yapanlar	8	27
Genel Toplam	30	100

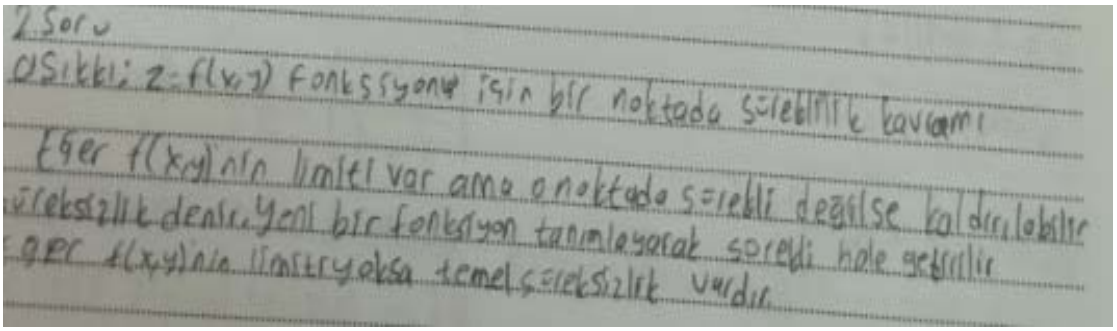
Öğretmen adaylarının %70'i iki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramının tanımını tam olarak doğru cevaplamışlardır. Bu durum adayların süreklilik tanımına yönelik kavramsal bilgilerinin iyi durumda olduğu görülmektedir. Adayların %3'ü yarım, %23'ü yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır.

Öğretmen adaylarının limit tanımına yönelik verdiği cevaplar incelenerek formal tanım ve informal tanım yapanlar olarak iki temaya ayrılmıştır. Adayların verdikleri cevapların yüzde ve frekans dağılımları aşağıdaki Tablo 4.21'de yer almaktadır.

Tablo 0.21. *İki değişkenli fonksiyonlarda formal ve informal tanıma yönelik cevapların frekans ve yüzde dağılımı*

İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik	**Tam yapanlar**		**Yarım yapanlar**		**Yanlış yapanlar**		**Genel Toplam**
	Frekans	Yüzde(%)	Frekans	Yüzde(%)	Frekans	Yüzde(%)	
Formal Tanım	16	80	2	10	2	10	20
İnformal Tanım	7	58	1	8	4	34	12

Öğretmen adaylarından 20'si formal tanımı, 12'si informal tanımı ve iki kişi de hem formal hem informal tanımı bir arada kullanmıştır. Formal tanımı tam yapanların oranı %80'dir. Formal tanımın %10'u yarım, %10'u ise yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır. İnformal tanım yapan adaylar kendi içinde değerlendirildiğinde; % 58'i tam, % 8'i yarım, %34'ü yanlış yanıt vermişlerdir. Öğretmen adayları tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda frekans ve yüzde dağılımları dikkate alındığında formal tanımı tercih ettikleri görülmüştür. Bu durum tek değişkenli fonksiyonlarda formal tanımın tercih edilmesi ile benzerlik göstermektedir.



Şekil 0.30. *İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik verilen cevaplardan biri*

Şekil 4.30'da öğretmen adayının informal tanım yaptığı görülmektedir. Adayın kaldırılabilir süreksizlik ve temel süreksizlik kavramlarından bahsetmesi dikkat çekmektedir. İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik niceleyici kullanımına ait frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.22'de verilmiştir.

Tablo 0.22. *İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik niceleyici kullanımı*

Niceleyici kullanımı		**Frekans**	**Yüzde (%)**
Niceleyici Kullananlar	Tam yapanlar	11	79
	Yarım yapanlar	1	7
	Yanlış yapanlar	2	14

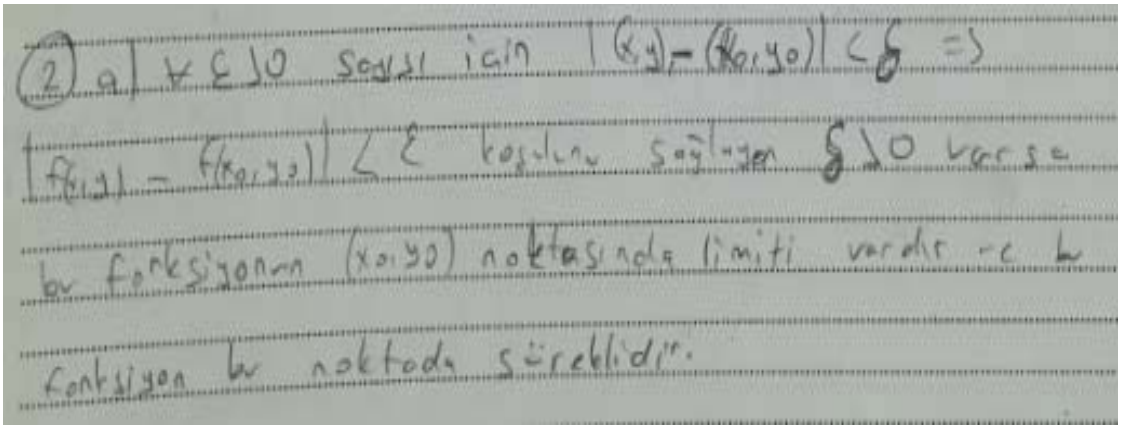
Tablo 4.22'ye göre öğretmen adaylardan 14'ü (%47) iki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik tanımı yaparken niceleyici kullanmıştır. Niceleyici kullanan öğretmen adaylarının %79'u niceleyicileri tam, %7'si yarım ve %14'ü yanlış olarak kullanmıştır.

Tablo 4.23'de niceleyici kullanmayan öğretmen adaylarına yönelik yüzde ve frekans dağılımları verilmiştir.

Tablo 0.23. *İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik niceleyici kullanmayanlar*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Niceleyicileri Kullanmayanlar	9	30

İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramına yönelik adaylardan 9'u (%30) niceleyici kullanmamıştır. Bu adayların yanıtları incelendiğinde informal tanım yaptıkları ortaya çıkmıştır.



Şekil 0.31. *İki değişkenli fonksiyonlarda öğretmen adayının süreklilik kavramına yönelik tanımı*

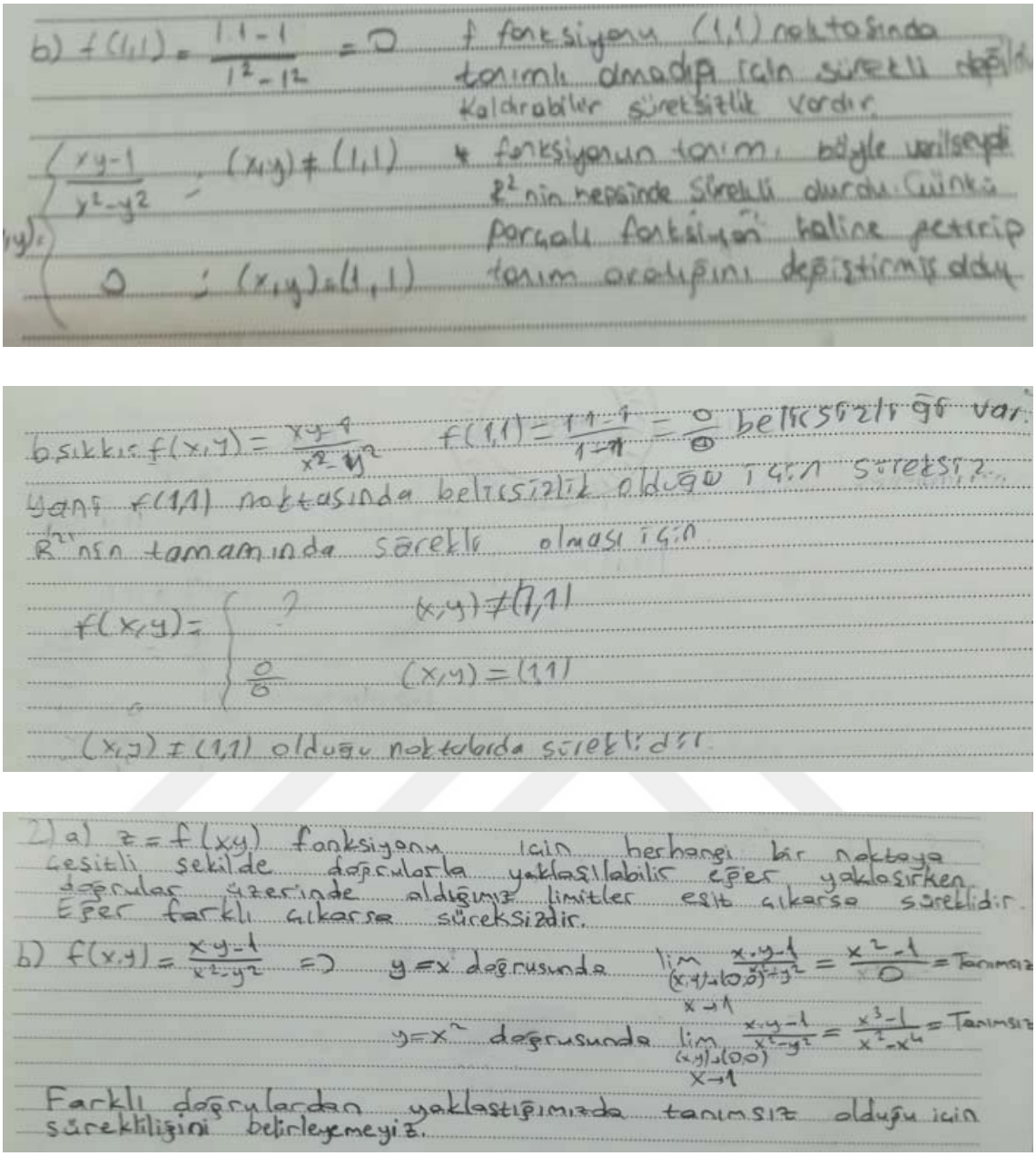
Şekil 4.31'deki örneğe göre öğretmen adayının iki değişkenli fonksiyonlarda limit ile süreklilik kavramlarını karıştırmış olduğu görülmektedir.

Birinci sorunun b şıkkında *f(x,y)* fonksiyonunun (1,1) noktasında sürekliliğinin incelendiği soruya ait öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.24'te verilmiştir.

Tablo 0.24. *2/b sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	15	50
Yarım yapanlar	9	30
Yanlış yapanlar	6	20
Genel Toplam	30	100

Tablo 4.24'e göre verilen fonksiyonun (1,1) noktasında sürekliliğini inceleyen öğretmen adaylarının %50'sinin tam doğru olarak cevapladıkları görülmektedir. Katılımcıların %30 oranında yarım, %20 oranında yanlış yapanlar kategorisinde yer aldıkları görülmüştür.



Şekil 0.32. *2/b sorusuna verilen yanıtlarından birkaçı*

Şekil 4.32'de öğretmen adaylarının belirsizlik ifadesi ile süreksizlik kavramı arasında ilişki kurmaya çalıştıkları anlaşılmaktadır. Bazı öğretmen adaylarının tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını karıştırdıkları ve hata yaptıkları görülmektedir.

Üçüncü sorunun amacı *f(x,y)* fonksiyonunun (1,-1) noktasındaki limitinin varlığının incelenmesidir. Soruda öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.25'te verilmiştir.

Tablo 0.25. *3. soruya ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	17	57
Yarım yapanlar	9	30
Yanlış yapanlar	4	13
Genel Toplam	30	100

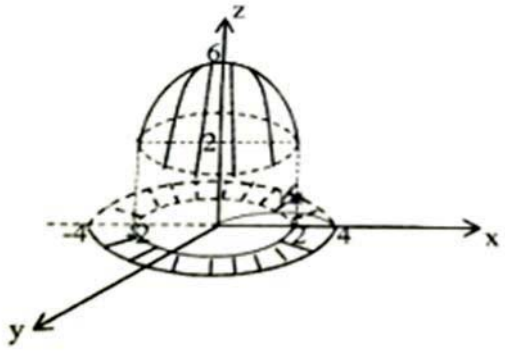
Tablo 4.25'e göre öğretmen adayları iki değişkenli bir fonksiyonun (1,-1) noktasındaki limitinin varlığını incelemiş ve %57 oranında başarı göstermiştir. Adayların %30'u yarım, %4'ü ise yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır.

$\lim_{x\to 1}(\lim_{y\to -1} f(x,y))$ ve $\lim_{y\to -1}(\lim_{x\to 1} f(x,y))$ tekrarlı limitlerini eşit bulan adayların birçoğu formal tanımı kullanarak limitin varlığını araştırdıkları görülmüştür. Çözümünde bazı adaylar farklı doğrular boyunca fonksiyonun davranışını incelemiştir ek olarak formal tanım ile çözümlerini desteklemişlerdir.

Öğretmen adaylarının 2.soru ile benzerlik gösteren 3.soruya yakın oranlarda başarı gösterdikleri görülmüştür. Adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde benzer yöntemleri kullanarak çözüme ulaştıkları saptanmıştır.

Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu iki doğru boyunca yaklaşmıştır ve sonuçları farklı bulan adaylar bu nedenle limitin var olmayacağını belirtmişlerdir.

Aşağıdaki şekil 4.33'te z = *f(x,y)* paraboloidinin grafiği verilmiştir.



Şekil 0.33. *z = f(x,y) fonksiyonunun grafiği*

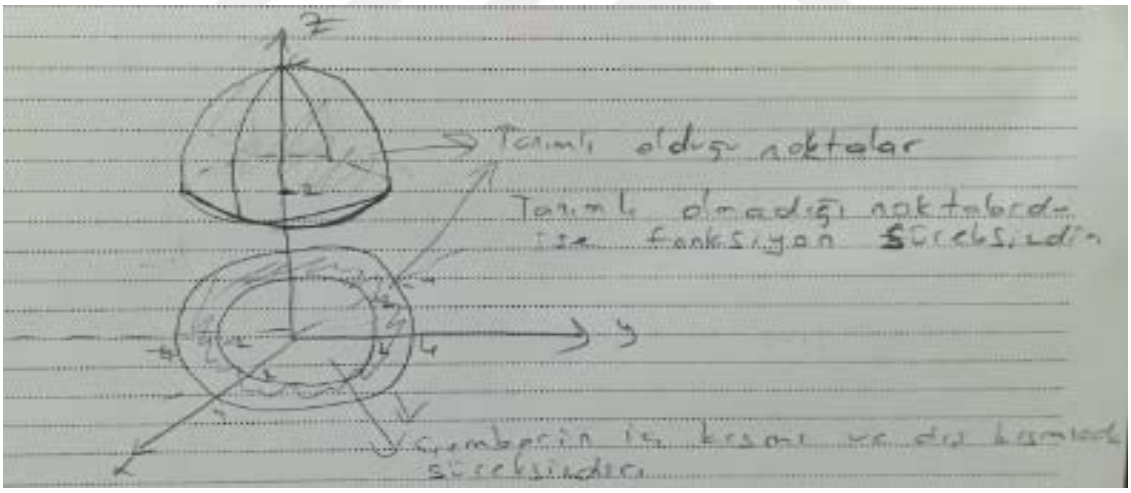
f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesini belirleyiniz.

İki değişkenli fonksiyonlarda z = *f(x,y)* fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların incelendiği soruda öğretmen adaylarının cevaplarına ait fekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.26'da yer almaktadır.

Tablo 0.26. *4 sorusuna ait cevapların frekans ve yüzde dağılımları*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	2	7
Yarım yapanlar	3	10
Yanlış yapanlar	25	83
Genel Toplam	30	100

Tablo 4.26'ya göre adayların iki değişkenli fonksiyonlarda %83'nün fonksiyonun süreksizlik noktalarını bulurken başarısız oldukları görülmüştür. Adayların %7'si tam, %10'u ise yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır. Öğretmen adaylarının test içinde yer alan sorular içerisinde en zorlandığı sorunun bu soru olduğu görülmüştür.



Şekil 0.34. *Öğretmen adaylarının cevaplarından birkaçı*

Şekil 4.34'te öğretmen adayı süreksiz olduğu noktalar kümesini grafik üzerinde ifade etmeye çalışmıştır ancak cebirsel olarak süreksiz olduğu noktalar kümesine değinmemiştir.

4.3. Tek ve İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit Kavramının Karşılaştırılması

Öğretmen adaylarının tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını tanımlanmasına yönelik karşılaştırmalar Tablo 4.27'de yer almaktadır.

Tablo 0.27. *Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının karşılaştırılması*

	Frekans	Yüzde (%)
Tek değişkenli fonksiyonlarda limit	6	20
İki değişkenli fonksiyonlarda limit	19	63

Öğretmen adayları tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının tanımında %20 tam doğru yaparken, iki değişkenli fonksiyonlarda ise %63 tam doğru cevap verdikleri görülmektedir. Burada beklenmedik bir sonuç elde edilmiştir. Fakat yapılan klinik görüşme sonuçlarına göre odak katılımcıların iki değişkenli fonksiyonunun limit tanımına yönelik sorulara yeterli cevaplar veremedikleri gözlemlenmiştir. Bu durumun nedeni öğretmen adayları tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını Analiz 1 dersini almadan önce görmüşlerdir ancak iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını ilk kez Analiz 2 dersinde işlemişlerdir. Kavram ile ilk kez karşılaştıklarından iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını daha iyi yapılandırdıkları düşünülmektedir.

4.4. Tek ve İki Değişkenli Fonksiyonlarda Sürekliliğin Karşılaştırılması

Tek değişkenli fonksiyonlarda sürekliliğe yönelik soruların karşılaştırıldığı Tablo 4.28'de verilmiştir.

Tablo 0.28. *Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik karşılaştırılması*

	Frekans	Yüzde (%)
Süreklilik 5.soru Tek D.	5	17
Süreklilik 2/a sorusu İki D.	15	50

Süreklilik konusunun uygulamasına yönelik bu tabloda tek değişkenli fonksiyonlarda %17, iki değişkenli fonksiyonlarda ise %50 oranında tam yapanlar kısmında yer aldıkları görülmektedir. Tek değişkenli fonksiyonlarda başarının düşük olmasının sebebi öğretmen adaylarının parçalı tanımlı fonksiyon hakkında bilgisinin eksik olmasından kaynaklanmaktadır. İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik uygulamasında adayların benzer çözüm yöntemlerini kullandıkları görülmektedir.

4.5. Tek ve İki Değişkenli Fonksiyonlarda Grafikte Sürekliliğin Karşılaştırılması

Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda grafiklerde fonksiyonun belirtilen noktada sürekliliği incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.29'da yer almaktadır.

Tablo 0.29. *Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda grafikte sürekliliğin karşılaştırılması*

	Frekans	**Yüzde (%)**
Tek değişkenli fonksiyonda süreklilik	25	83
İki değişkenli fonksiyonda süreklilik	2	7

Tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik konusunda %83 başarı gösterilirken, iki değişkenli fonksiyonlarda %7 oranında başarı gösterilmiştir. Adaylar tek değişkenli fonksiyonlara ait grafiklerin iki boyutlu analitik sistemde başarılı yorumlar yaparken, iki değişkenli fonksiyonlara ait üç boyutlu uzayda tanımlı grafiği yorumlamada güçlük çektikleri görülmüştür. Tek değişkenli fonksiyonlarda öğrencilerin cevapları incelendiğinde sağdan, soldan limit almada ve tanım değerini limit değerine eşitlemekte başarılı oldukları gözlemlenmiştir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç ve Tartışma

Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularına yönelik kavramsal ve işlemsel bilginin incelendiği araştırmada öğretmen adaylarına açık uçlu sorulardan oluşan bir test uygulanmış ve uygulanan test sonucunda elde edilen bulgular ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarından tek değişkenli reel değerli bir fonksiyonun limit kavramını tanımlamaları istenmiştir. Adayların %20'sinin limit kavramını tam olarak doğru yanıtladıkları görülmektedir. Adayların verdikleri cevaplar derinlemesine sonuçlar elde etmek için alt temalara ayrılmıştır. Limit tanımına yönelik yapılan bu temalar formal tanım yapanlar, informal tanım yapanlar ve komşuluk kavramı ile tanım yapanlar şeklindedir. Adayların %70'inin formal tanım yapmayı tercih ettikleri, ancak formal tanım yapan adayların %19'unun soruyu tam olarak doğru cevapladıkları görülmüştür. Limit tanımı yapan adaylar, niceleyici kullanan ve niceleyici kullanmayan olarak iki alt gruba ayrılmıştır. Adayların niceleyiciyi kullananlar kategorisinde %53'ünün tam olarak niceleyicileri doğru kullandıkları görülmüştür. Adayların limitin formal tanımını yaparken dikkat çeken noktalardan biri "keyfi $\varepsilon > 0$" ifadesinin tercih edildiği anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının limitin formal tanımını ve niceleyicilerin anlamlarını bilmeden kullandıkları ortaya çıkmaktadır. Öğretmen adaylarının limit kavramını tanımlamaları istendiğinde genellikle formal tanıma başvurdukları görülmüştür. Araştırmanın alt problemine yönelik veriler değerlendirildiğinde, adayların formal tanımda niceleyici kullanırken yanlış yerde kullanmaları ve yapılan görüşmeler sonucunda niceleyicileri ezbere kullandıklarını ifade ettikleri görülmüştür. Limitin formal tanımında (ε-δ) kullanılan dört farklı niceleyici $\forall, \exists, \ni, \leftrightarrow$ tanımı anlaşılmasını güçleştirmektedir (Todorov, 2001). Bu durum, araştırmadan elde edilen verilerle uygunluk göstermektedir.

Öğretmen adaylarından $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ verildiğinde $\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = L_1 - L_2$ olduğunu kanıtlamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının %3'ü yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır. Öğrencilerin limitin formal tanımını uygularken başarılı oldukları görülmüştür. Sorunun derinlemesine analiz edebilmesi için alt temalara ayrılmıştır. Bu temalar L_1 için $\forall \varepsilon' a$ karşılık δ_1 seçenler, L_2 için $\forall \varepsilon' a$

karşılık δ_2 seçenler ve $L_1 - L_2 \to \min(\delta_1, \delta_2)$ seçenler şeklinde gruplandırılmıştır. L_1 için $\forall\varepsilon' a$ karşılık δ_1 seçenler ve L_2 için $\forall\varepsilon' a$ karşılık δ_2 seçenler %80 iken $L_1 - L_2 \to \min(\delta_1, \delta_2)$ seçenlerin %73 olduğu görülmektedir. Adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde dikkat çeken hatalardan birinin niceleyicilerin yanlış yerde kullanılması olduğu ortaya çıkmaktadır.

Adaylardan 2. soruda $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ olduğunu formal tanımı kullanarak göstermeleri istenmiştir. Adayların %20'si tam yapanlar kategorisinde, %53'ü yanlış yapanlar kategorisinde yer almıştır. Adayların formal tanımı uygularken güçlük yaşadıkları görülmüştür. Problem alt temalara ayrılmıştır. Bu temalar; sağ komşuluğu doğru tanımlayanlar, sağ komşuluğu yanlış tanımlayanlar ve $\forall M > 0$ tercih edenler şeklindedir. Adayların %7'sinin sağ komşuluğu doğru tanımlayanlar, %73'ünün ise sağ komşuluğu yanlış tanımlayanlar kategorisinde yer aldıkları görülmüştür. Adayların % 40'ı $\forall M > 0$ tercih ifadesini tercih etmiştir. Verilen yanıtlar incelendiğinde adayların $\forall M > 0$ yerine $\forall\varepsilon > 0$ tercih ettikleri ve anlamsız ifadeler kullandıkları görülmüştür. Bu durum adayları sonsuz limit konusunda yeterli kazanıma sahip olmadıklarını göstermektedir. Bunun sonucunda da tek yönden limit uygulamasında da yeterli kazanıma sahip olmadıkları söylenebilir.

Adaylardan formal tanımı kullanarak $x \to +\infty$ iken $f(x) = \frac{1}{x^2} \to 0$ olduğunu göstermeleri istenmiştir. %3'ü tam yapanlar kategorisinde yer alırken, %50'si yanlış yapanlar kategorisindedir. Adaylar soruyu formal tanımı kullanarak çözmeye çalışmıştır ancak adayların başarısız oldukları görülmüştür. Adayların ifade ve çözümleri incelendiğinde bir çoğunun matematiksel öğrenmeyi işlemlerin, kuralların, özellik ve bağıntıların bilinip bunların bilgi seviyesinde uygulanması olarak gördükleri anlaşılmaktadır. Dolayısıyla adayların bilgileri hatırlayamamasından kaynaklı matematiksel açıdan geçersiz işlemler yaptıkları dikkat çekmektedir (Schoenfeld, 1985). Adaylardan bir kısmı ∞ kavramını reel sayı olarak düşünmüştür ve yerine koyma metodunu kullanmıştır. Bu durum, Barak (2007)'ın araştırması ile uygunluk göstermektedir. Bu nedenle adayların ezbere ve yüzeysel öğrenmeler gerçekleştirdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum literatür sonuçlarıyla karşılaştırıldığında benzerlik göstermektedir.

Adaylardan $\lim_{x\to 0}[\![cosx]\!]$, $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x$, $\lim_{x\to 3^-}\frac{[\![2x-[\![x+3]\!]]\!]}{x-3}$, $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-12}{x^3-3x-2}$ sorularını yanıtlamaları istenmiştir. Adayların daha çok işlem bilgisini ölçen bu sorularda yüksek başarı gösterdikleri görülmüştür. Adaylar genellikle fonksiyonun bir noktadaki limitini bulurken istenen noktayı fonksiyonda yerine yazmıştır, eşlenik kullanma ve cebirsel işlemler ile sonuca ulaşmayı tercih etmişlerdir. Bu durum Williams (1991) bir araştırmasında öğrencilerin basit ve pratik limit modellerini limitin formal tanımından daha önemli gördüklerini, sınıf ortamında kullanılan bu basit ve pratik limit modellerinin sınavda başarılı olmak için yeterli görüldüğünü ve öğrencilerin formal bilgilerinin (sürekli fonkiyonlarda yerine yazma, çarpanlara ayırma, sadeleştirme, eşlenik kullanma ve L' Hospital's yöntemini kullanma) kavramsal bilgilerinden oldukça ayrık olduğunu ifade etmektedir. Bu durum araştırmadan elde edilen bulgularla uygunluk göstermektedir. Bu araştırma, Soylu ve Aydın (2006) çalışması ile uygunluk göstermektedir. İşlemsel bilgilerin ölçüldüğü sorularda adayların doğru cevaplama oranlarının yüksek olduğu ifade edilmektedir. Tall ve Gray (1991)'in araştırmasında öğrencilerin limite yaklaşma işlemini ve limit değeri kavramını ifadelerinin ikisi de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ sembolüyle gösterildiğinden, limitin sadece işlem anlamı olduğunu düşünebildiklerine değinmişlerdir. Tek değişkenli fonksiyonlarda adayların sağdan, soldan limit ve tanım değerini limit değerine eşitlemekte bulmakta başarılı oldukları gözlenmiştir. Limit, fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile ilişkilendirilmese de bu yaklaşım şekli limitin o nokta civarında alacağı değer için çıkarımda bulunulmasını sağlar (Özmantar ve Yeşildere, 2008). Oysa ki limit, fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile ilişkilendirilirse ezbere çözümler elde edilir. Limit, fonksiyonun limit alınan noktanın civarındaki davranışı ile ilişkilendirilmelidir. Öğrencilere limit alınan noktanın fonksiyondaki değerine eşit olmadığı örnekler verildiğinde, onlar bu durumun istisna olduğunu ifade etmekte ya da bu durumları limit tanımının her zaman çalışmadığı durumlar olarak değerlendirmektedirler (Williams, 1991). Bu durumların oluşması işlemsel bilgi ağırlıklı öğretimin öncelikli kılınması sonucu kavram yanılgıları oluşmasına neden olmuştur. Limit kavramının öğretilmesi esnasında genellikle öğrencilerin bu kavramla ilk kez karşılaştığı durumlarda, limit ve fonksiyonun limiti alınan noktadaki almış olduğu değerin aynı olması ve limitin hesaplanması için o noktanın verilen fonksiyonda yerine yazılması birçok durumda sonuca ulaştırmaktadır. Öğrencilerin bu örneklerle karşılaşmaları sonucu oluşan algıları, eksikliklerine rağmen

limitin yerine koyma yöntemi ile eşdeğer olduğu yanılgısını desteklemektedir (Ferrini-Mundy ve Graham, 1994; Williams, 1991). Bu araştırma Ferrini Mundy ve Graham ve Williams'ın çalışmalarıyla uygunluk göstermektedir.

Sonsuz kavramının anlaşılması oldukça zor iken tanımsızlık veya belirsizlik durumlarına karar verilmesi öğrenciler için anlaşılması güç noktalardan birini oluşturmaktadır. Bu farka dikkat çekilirken belirsizliğin farklı olası sonuçlardan geçerli olanın bilinmediği durumlarda ya da farklı yaklaşımlarla farklı sonuçlara ulaşılmasından dolayı ortaya çıktığının belirtilmesi kavramın anlaşılması açısından faydalı olabilir (Özmantar ve Yeşildere, 2008). Bu yüzden belirsizliğin olduğu durumlarda limit ve sürekliliğin nasıl araştırıldığının ifade edilmesi, ∞ ifadesinin limitte nasıl kullanıldığını ve işlemsel olarak bu belirsizliğin nasıl giderildiğini açıklamak bilgilerin kavramsal ve işlemsel açıdan yapılandırılabilmesi için önemlidir.

Adayların $f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında sürekliliğinin incelendiği bu soruda %17'si tam olarak doğru yanıt verirken, %66'sının yanlış yapanlar grubunda yer aldıkları görülmüştür. Adayların trigonometrik fonksiyonların limitini alırken ve değişken değiştirme işlemlerinde sıkıntı yaşadıkları dikkat çekmektedir. Ayrıca, öğretmen adaylarının parçalı tanımlı fonksiyonlarda sürekliliği inceleme ve yorumlamada yetersiz oldukları görülmüştür. Parçalı tanımlı verilen fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımsız olarak kabul ettikleri dikkat çekmiştir. Bunun sonucunda öğretmen adaylarının parçalı tanımlı fonksiyonun özelliklerini bilmedikleri anlaşılmaktadır.

Adaylardan verilen grafikte belirli noktaları süreksizlik açısından incelemeleri istenmiştir. Adayların bir kısmı fonksiyonun verilen noktada sürekli olması için sağdan ve soldan limitlerin varlığını yeterli görmüştür. Tek değişkenli fonksiyonlara ait grafiğin limit ve süreklilik kavramlarına yönelik yorumlanmasında %83 oranında başarı gösterdikleri ifade edilebilir. Adayların tek değişkenli fonksiyonlarda grafiği başarılı yorumlaması literatür incelendiğinde Graham ve Ferrini-Mundy (1989) araştırmasından elde edilen bulgularla benzerlik göstermektedir. Bazı öğretmen adaylarının süreklilik kavramında sağdan ve soldan limitlerin birbirine eşit olmasının yanı sıra fonksiyonun o noktadaki değerinin elde edilen limitlere eşit olduğunun gözardı edildiği de görülmektedir. Bu durum Dönmez (2009)'in araştırması ile uygunluk göstermektedir.

Öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik testine verdikleri yanıtlar incelendiğinde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Öğretmen adaylarından 1.soruda iki değişkenli fonksiyonlar için limit kavramını tanımlamaları ve bu tanımı yorumlamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının %63'ü limit kavramına tam olarak doğru yanıt vermiştir. Öğretmen adaylarının verdikleri cevapların derinlemesine analiz edimesi için alt temalara ayrılmıştır. Adayların iki değişkenli fonksiyonlarda limit tanımını yaparken formal tanımı kullanmayı tercih ettikleri ve formal tanım kullananların %43'nün ise tam olarak doğru tanımladıkları görülmüştür. İnformal tanım yapan ve komşuluk kavramı ile tanım yapanlardan %13'lük kısım tam yapanlar grubunda yer almıştır. Tanımlar incelendiğinde niceleyici kullananlar ve kullanmayanlar olarak iki grupta incelenmiştir. Niceleyici kullananların %37'sinin tam yapanlar kategorisinde yer aldıkları görülmüştür. Adayların %30'unun niceleyici kullanmadıkları dikkat çekmektedir. Niceleyici kullanmayan adaylar iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramından ne anladıklarını sözel olarak ifade etmeyi tercih etmiştir. Araştırma neticesinde öğrencilerin belli bir düzeyde limit kavramını ifade edebildikleri ancak kavram oluşturulurken aşamalarda güçlük yaşadıkları ortaya çıkmıştır (Hofe, 1997). Limit ve süreklilik okulda karşılaşılmadan önce öğrenciler tarafından kullanılmakta olan kavramlar arasında yer almaktadır. Ancak öğrencilerin limite ilişkin sezgisel anlamaları ile okulda formal olarak öğrendikleri limit kavramı ile çoğu zaman bağ kurulamamaktadır (Fey, 1984).

Niceleyici kullanan adayların dikkat çeken hatalarından biri limit konusunu iki değişkenli fonksiyonlara genellerken yanlış niceleyici ve notasyon kullandıkları dikkat çekmektedir. Görüşmede adaylardan bir kısmının genelleme yaparken anlamsız hatalar yaptıkları görülmektedir.

Adaylardan iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığının gösterilmesi istenmiştir. Adaylar sorunun çözümünde tek değişkenli fonksiyonlardaki limit tanımına benzer olarak formal tanımı kullanmayı tercih etmiştir. Adayların %40 oranında başarı gösterdikleri görülmektedir. Akbulut ve Işık (2005), araştırmasında öğrencilerin limitin ε -δ tekniğini anlamadıkları sonucunu elde etmişlerdir.

Adaylardan iki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik kavramının tanımı istenmiştir. Adayların süreklilik tanımına yönelik yanıtları %70 oranında tam yapanlar

kategorisinde yer almaktadır. Adaylardan formal tanım yapanların %53'ünün ve informal tanım yapanların % 23'ünün tam yapanlar olarak belirlenmiştir. Adayların bir çoğunun süreklilik kavramının tanımında formal tanımı tercih ettikleri görülmüştür. Tanım yapılırken niceleyici kullananlardan %37'si tam yapanlar kısmında yer almıştır. Adayların %30'u niceleyici kullanmamayı tercih etmiştir.

İki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik karşılaştırıldığında adayların süreklilik kavramını tanımlarken daha başarılı oldukları görülmüştür.

Adaylardan verilen iki değişkenli fonksiyonunun istenen bir noktada sürekliliğini incelemelerini ve bu fonksiyonun R^2 nin tamamında sürekli olacak şekilde genişletilip genişletilemeyeceğinin açıklanması istenmektedir. Adayların %50'sinin soruyu tam yapanlar kategorisinde yer aldıkları görülmektedir. Adaylar süreklilik kavramına yönelik %70 başarı gösterirken süreklilik tanımının uygulandığı bu soruda başarı oranlarını düşürdükleri görülmüştür. Adayların iki farklı doğru boyunca yaklaşım sonucu elde edilen limitlerin eşitliğini limitin varlığı için yeterli gördükleri anlaşılmıştır.

Adaylardan verilen iki değişkenli bir fonksiyonun verilen bir noktadaki limitinin varlığı hakkında açıklama yapması istenmiştir. Adayların %57 oranında başarı gösterdikleri görülmüştür. Adayların bir çoğu iki farklı doğru boyunca yaklaşımı tercih etmiştir. Adaylar $\lim_{x\to 1}(\lim_{y\to -1} f(x,y))$, $\lim_{y\to -1}(\lim_{x\to 1} f(x,y))$ yöntemini kullanmayı tercih etmişlerdir. Adaylar limitlerin sonucunu farklı bulduğundan limit yoktur yorumunu yapmışlardır. Adayların, fonksiyonun limitini bulmak için yerine koyma metodundan faydalandıkları görülmüştür. Çözüm için benzer metodlara başvurdukları görülmüştür. Limit kavramını öğretiminde, limit bulmayla ilgili işlemlere limit kavramının tartışılmasına göre daha fazla zaman ayrılmaktadır. Öğrenciler limiti kavramsal olarak oluşturmadan da limitle ilgili soru çözebilmekte ve doğru yanıtlara ulaşabildikleri görülmektedir (Brown, 2004).

Adaylardan grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar kümesinin bulunması istenmektedir. Adayların %7'si tam yapanlar kategorisinde yer almıştır. Adayların üç boyutlu grafiği okuma ve yorumlamada sıkıntı yaşadıkları gözlemlenmiştir.

Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramları karşılaştırıldığında öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonlarda daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu durum literatür incelendiğinde literatür ile benzerlik göstermemektedir. Öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramına yönelik başarı oranı %20 iken, iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramına yönelik başarısı %63'tür. çekmektedir. Bu durumun nedeninin öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonlarla Analiz 2 dersinde ilk defa karşılaşması sonucu kavramı daha iyi yapılandırdıkları düşünülmektedir.

Tek değişkenli fonksiyonlara ait grafiğin limit ve süreklilik kavramlarına yönelik yorumlanmasında başarılı oldukları görülürken, iki değişkenli fonksiyonlarda adayların grafiği yorumlama açısından güçlük yaşadıkları görülmüştür. Bu durum adayların üç boyutlu uzayda grafik yorumlama ile ilgili beceri ve kazanımlarının yeterli olmadığından kaynaklanmaktadır.

Öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarını ifade ettikleri ve pratik limit problemleri verildiğinde çözebildikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarından bir kısmının sorulara doğru yanıt verirken çözümü gerekçelendiremedikleri ve sezgisel olarak yanıtladıkları dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarının en yüksek oranda başarı gösterdiği sorular işlemsel bilgiyi ölçmeye yöneliktir.

5.2. Öneriler

Matematikte yer alan limit ve süreklilik kavramlarının ve içerinde yer alan niceleyileyicilerin anlamlarının tam anlamıyla bilinmesi, komşuluk kavramının zihinsel şemada yer bulabilmesi limit ve sürekliliğin kavramsal ve işlemsel bilgilerinin dengelenmesi açısından önem arz etmektedir. Öğretimde kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişki kurulmalı ve öğrencilerin ezbere yöntemler yerine matematiksel düşünmesinin gelişimini sağlayacak anlamsal ve kavramsal öğrenmeye dikkat çekilmelidir.

Tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularına ilişkin kavramlar öğrencilere kavramsal alt yapıları güçlü olacak şekilde öğretilmeli, şekil ve şemalardan faydanılmalıdır. Özellikle iki değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik hakkında çıkarımda bulunabilmek için verilen grafiğin anlaşılması ve

okunması yönünde eksiklikler giderilmelidir. Bunun için iki değişkenli fonksiyonlara ait grafiklerin yorumlanması konusunda öğretmen adaylarının derinlemesine öğrenmesine yönelik derslere yer verilmelidir. Fonksiyon konusundaki eksiklikler giderilmelidir. Tam değer fonksiyonu ve parçalı tanımlı fonksiyonlara yönelik öğretim çalışmaları yapılmalıdır.

Derste kavramsal altyapıyı oluşturacak etkinliklere yer verilmeli, öğrencilerin kavram yanılgısı yaşamamaları için çoklu temsiller ve farklı çözüm yöntemlerinden faydalanılmalıdır.

Öğrencilerin nasıl ve niçin ilişkisini kurarak verilen ifadeye yönelik çıkarımda bulunması sağlanmalıdır.

Limit ve süreklilik konularındaki hata ve kavram yanılgılarının belirlenmesi öğrencilerin bu konuyu temele alan analizin diğer konularında (türev, diferansiyel ve integral) daha başarılı olmalarına öncülük eder.

Matematikte kavramların kazanılması için bu kavramlarla ilgili şemaların zihinde oluşturulması gerekir. Öğrencilerin örneklerden ve durumlardan genellemelere ulaşması, genellemeleri ve ilkeleri öğrencinin kendisinin bulması sağlanmalıdır.

Matematik öğretiminde ön öğrenmeler oldukça önemli olduğundan yeni konuya geçilmeden önce bu konuyla ilgili ön öğrenmeler hatırlanmalıdır.

Alan bilgisi derslerine daha çok yer verilerek öğretmen adayının kendi alanında derinlemesine eğitim ve öğretim verilerek yetişmesi sağlanmalıdır.

KAYNAKÇA

Adams, R.A. (1999). *Calculus: A Complete Course.* Canada: Addison-Wesley.

Akbulut, K. ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(2), 497-512.

Altun, M. (2010). *İlköğretim ikinci kademede (6,7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. İstanbul: Alfa Yayınları.

Arslan, S. ve Çelik, D. (2013). Zor sanılan iki kavram: Limit ve süreklilik. İ. Ö. Zembat vd. (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 463-487). Ankara: Pegem Akademi.

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus: What can be learnt from education research and curricular changes in France? *CBMS Issues in Mathematics Education,* 8, 1-15.

Baki, A. (1994). Breaking with tradition: a study of Turkish student teachers' experiences within a logo-based mathematical environment. Unpublished PhD Thesis. University of London, Institute of Education.

Baki, A. (1995). What prospective teachers need to know to teach conceptually in mathematics? *The World Conference on Teacher Education*. Turkey: Çeşme.

Baki, A. (1997). Educating mathematics teachers. *Journal of Islamic Academy of Sciences*, 10 (3), 93-102.

Baki, A. (1998). Matematik öğretiminde işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesi, *Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş yıldönümü matematik sempozyumu*, Erzurum: Atatürk Üniversitesi, s. 259-263.

Baki, A. ve Bell, A. (1997). *Ortaöğretim matematik öğretimi*. Ankara: YÖK.

Baki, A., Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin değerlendirilmesi, 2 (1).

Baki, A. (2006). Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi. Trabzon: Derya Kitabevi.

Baki M. ve Çekmez, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education.* 3(2), 81-98.

Barak, B. (2007). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Balıkesir: Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., and Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions at Spanish High Schools. In beyond the apparent banality of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 235-268.

Baş, F., Çakmak, Z., Işık, A. ve Bekdemir, M. (2015). Öğretim elemanları ile öğrencilerin derste oluşturduğu tanımlar arasındaki farklar ve sebepleri. *İlköğretim Online.* 14(4), 1276-1289.

Baykul, Y. (1993). *İlköğretimde matematik öğretimi*, Ankara: Pegem.

Baykul, Y. (2005). *İlköğretimde matematik öğretimi (1-5 sınıflar için).* Ankara: Pegem.

Biber, A. Ç. (2010). *Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkilerin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Biber, A. ve Argün, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarında iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramının yapılandırılmasının incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 56-66.

Brown, A. (2004). *Learner conceptions of the limits concept*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Alberta :University of Calgary, Institute of Education.

Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir*

program geliştirme. Yayımlanmamış Doktora Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113–132). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Çıldır, S. (2012). Limit konusunun bilgisayar ortamında görselleştirilmesi ve fizik öğretmen adaylarının konu hakkındaki görüşleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 42, 143-153.

Cobb, P. (1986). Context, goals, beliefs, and learning mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 2-9.

Cornu, B. (1991). Limits. D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (pp. 153–166). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., and Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

DiSessa, A. (1985). Leaming about knowing. E. Klen (Ed.), *New directian for child development.* San Fransisco.

Dönmez, G. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına yönelik pedagojik alan bilgisinin değerlendirilmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Elo, S. and Kyngas, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107-115.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.

Erbaş, A. K. ve Ersoy, Y. (2002). Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ve olası kavram yanılgıları. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Ankara: ODTÜ, s. 988.

Ferrini-Mundy, J. and Graham, K. G. (1989). An exploration of student understanding of central concepts in calculus. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco.

Ferrini-Mundy, J. and Graham, K. G. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. J.J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research ıssues in mathematics learning: Preliminary analyses and results*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 33, 29-45.

Garofalo, J & Durant, K. (1991) Where did that come from? A frequent response to mathematics instruction. School Science and Mathematics, 91(17), 318-321.

Gray, E.M. and Tall, D. O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking, *Proceedings of PME XV*, Italy: Assisi.

Gülbahar, Y. ve Alper, A. (2009). Öğretim teknolojileri alanında yapılan araştırmalar. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi,* 42(2), 93-111.

Gürbüz, R., Toprak, Z., Yapıcı, H. ve Doğan, S. (2011). Ortaöğretim matematik müfredatında zor olarak algılanan konular ve bunların nedenleri. *University of Gaziantep Journal of Social Sciences,* 10(4), 1311–1323.

Fey, J. (1984). *Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula.* Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.

Hiebert, J. and Lefevre, P., (1986). Conceptual and procedural knowledge in mahtematics: An ıntroductory analysis, *The case of mathematics*, New York.

Hofe, R. V. (1997). Problems with the limit concept-on a case study of a calculus lesson within a computer-based learning environment. http://www.fmd.uniosnabrueck. de/ebooks/gdm/PapersPdf1997/vomHofe.pdf. (Erişim tarihi: 15.06.2003).

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of limit concept in mathematics course for engineering students.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Pretoria: University of South Africa, İnstitute of Education Sciences.

Kabaca, T. (2006). *Limit kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kabael, T., Başak, B. ve Özdaş, A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 5(1), 88-114.

Kabael, U. T. (2017). *Genel matematiksel kavramlar süreçleri ve öğretim yaklaşımları.* Ankara: Pegem.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Milli Eğitim Bakanlığı (2005b). *Orta öğretim matematik (9,10,11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*. Talim ve Terbiye Kurulu Bakanlığı. Ankara.

Noss, R. and Baki, A. (1996). Liberating scholl mathematics from procedural view, *Journal of Education Hacettepe University*, 12, 179-182.

Oaks, A. B. (1990). Writing to learn mathematics: Why do we need it and how can it help us? Associations of Mathematics Teachers of New York States Conference, Ellenvile.

Özmantar, M. F. ve Yeşildere, S. (2008). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri içinde* (s. 181-218). Ankara: Pegem.

Quesada, A., Richard, L., and Wiggins, M. (2008). The impact of the graphical approach on students' understanding of the d efinition of limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 15(3), 95-102.

Porter, M. and Masingila, J. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 42, 165-177.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics,* 55, 103-132.

Roh, H. K. (2007). An activity for development of the understanding of the concept of limit. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park and D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the ınternational group: Psychology of mathematics education.* Seoul: PME. pp. 105-112.

Sanchez, R., A. (1996). *Teachers' and students' mathematical thinking in a calculus classroom: the concept of limit.* USA: Florida State University.

Schoenfeld, A. H., (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338-355.

Senemoğlu, N. (2001). *Gelişim öğrenme ve öğretme kuramdan uygulamaya*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associatives.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silverman, R. A. (1992). *Calculus with analytic geometry.* New Jersey: Prentice Hall, ABD.

Soylu, Y. ve Aydın, S. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelemesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 83-95.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132-135.

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(7), 151-169.

Tekcan, A. (2013). *İleri analiz*. Bursa: Dora Basım Yayın.

Todorov, T. D. (2001), Back to classics: teaching limits through infinitesimals, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 1-20.

Ubuz, B. (1999), First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20 (1), 113-115.

Van De Walle, J. A. (1989). *Elementary school mathematics*. New York: Longman.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching Developmentally*. (5th ed.). Boston: Allyn &Bacon.

Weir, M. D., Hass, J., and Giordano, F. R. (2005). *Thomas' calculus* (11th Ed.) London: Pearson Education.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22(3), 219-236.

Yanık, H. B. (2016). Kavramsal ve işlemsel anlama. E. Bingölbali, S. Arslan, i. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s.102-116). Ankara: Pegem.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

EKLER

EK-1

1. a) Tek değişkenli reel değerli bir fonksiyonun limit kavramını tanımlayınız.

b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ olsun. $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = L_1 - L_2$ olduğunu kanıtlayınız.

2. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ olduğunu formal tanımı kullanarak gösteriniz.

3. Formal tanımı kullanarak $x \to +\infty$ iken $f(x) = \frac{1}{x^2} \to 0$ olduğunu gösteriniz.

4. Aşağıdaki fonksiyonların limitlerini bulunuz.

a) $\lim_{x\to 0} [\![cosx]\!]$

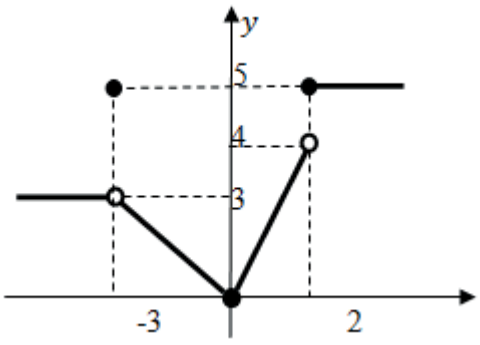
b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![2x-[\![x+3]\!]]\!]}{x-3}$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2-12}{x^3-3x-2}$

5) $f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun x=0 noktasında sürekli olup olmadığını belirleyiniz.

6)



Yukarıda verilen *f(x)* fonksiyonu hangi noktalarda sürekli değildir? Açıklayınız.

EK-2

1. ***a***) $f: R^2 \to R,\ z = f(x,y)$ fonksiyonu için limit kavramını tanımlayınız ve bu tanımı yorumlayınız.

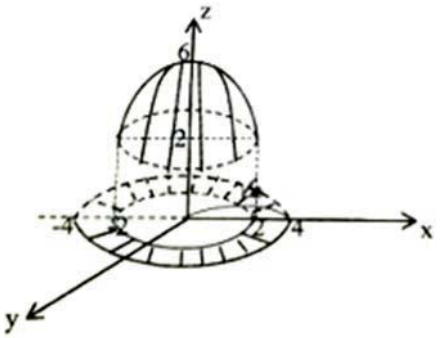
b) $f(x,y) = \frac{x+y+x^2+y^2}{x+y-x^2-y^2}$ fonksiyonunun (0,0) noktasındaki limitinin -1 olduğunu gösteriniz.

2. a) $f: R^2 \to R,\ z = f(x,y)$ fonksiyonu için bir noktada süreklilik kavramını tanımlayınız.

b) $f(x,y) = \frac{xy-1}{x^2-y^2}$ fonksiyonunun (1,1) noktasında sürekli midir?

3. $f(x,y) = \frac{xy^2-1}{x^2y-1}$ fonksiyonunun (1,-1) noktasındaki limitinin var olup olmadığını nedenleri ile açıklayınız.

4. Aşağıda z = *f(x,y)* paraboloidinin grafiği verilmiştir.



f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesini belirleyiniz.

EK-3

Evrak Kayıt Tarihi: 09.04.2018	Protokol No: 41452	Tarih:26.04.2018

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Yüksek Lisans Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Öğretmen Adaylarının Tek ve İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik Konusundaki Bilgilerinin İncelenmesi
~~PROJE~~/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU
TEZ YAZARI:	Birgül YILDIZ
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

Prof.Dr. Coşkun BAYRAK
(Başkan-Eğitim Fak.)

Prof.Dr. T. Volkan YÜZER *(Başkan Yardımcısı-Açıköğretim Fak.)*	**Prof.Dr. Esra CEYHAN** *(Eğitim Fak.)*
Prof.Dr. Münevver ÇAKI *(Güzel Sanatlar Fak.)*	**Prof.Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ** *(İkt. ve İdari Bil. Fak.)*
Prof.Dr. Handan DEVECİ *(Eğitim Fak.)*	**Prof.Dr. Emel ŞIKLAR** *(İkt. ve İdari Bil. Fak.)*

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Birgül YILDIZ

Yabancı Dil : İngilizce / İyi

Doğum Yeri ve Yılı : Eskişehir / 1991

E-Posta : birgulyildiz777@gmail.com

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- Mezuniyet Yılı: 2014
- Üniversite: Anadolu Üniversitesi
- Fakülte: Fen Fakültesi
- Bölüm: Matematik